MONOGRAFJE MATEMATYCZNE
KOMITET REDAKCYJNY:
S. BANACH, B. KNASTER, K. KURATOWSKI,
S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPIŃSKI i H. STEINHAUS
TOM IV

HYPOTHÈSE DU CONTINU

PAR

WACŁAW SIERPIŃSKI
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE VARSOVIE

Z SUBWENCJI FUNDUSZU KULTURY NARODOWEJ
WARSZAWA - LWÓW 1934

PRÉFACE.

La question si l'ainsi dite *hypothèse du continu* est vraie ou non appartient aux problèmes les plus difficiles de la mathématique contemporaine. La présente monographie ne tend point à résoudre ce problème; elle a pour but de faire connaître au lecteur les conséquences que l'hypothèse du continu implique.

Il y a des personnes, même parmi les savants éminents, qui doutent de la possibilité de jamais résoudre le problème du continu. Dans ces conditions, les conséquences de l'hypothèse du continu peuvent être considérées pratiquement comme si elles étaient vraies. En tout cas, on peut affirmer avec certitude qu'une tentative d'ébranler une conséquence quelconque de l'hypothèse du continu serait non moins difficile que la tentative d'ébranler l'hypothèse même.

Ce fait justifie déjà l'intérêt qu'il y ait de prendre connaissance des conséquences qui résultent de l'hypothèse du continu. Chacune de ces conséquences donne naturellement lieu à la question si on peut la démontrer sans l'hypothèse du continu (ou, du moins, à l'aide des hypothèses plus faibles) ou bien si elle est, par contre, équivalente à cette hypothèse. Partout où c'était possible je tachais de tenir compte de ces questions, en indiquant au besoin le dégré des difficultés qu'elles comportent. Quant à la manière de déduire les conséquences de l'hypothèse du continu, je tachais autant que possible d'établir d'abord sans cette hypothèse les théorèmes généraux pour en tirer ensuite ces conséquences par l'application directe de l'hypothèse en question.

L'introduction de ce livre a pour but d'expliquer en quoi consiste l'hypothèse du continu et l'ainsi dit *problème du continu.* J'y donne deux énoncés de l'hypothèse du continu: l'un basé sur la notion de *quantité* (puissance d'un ensemble) et l'autre sur celle *d'ordre.* Plusieurs propositions équivalentes à cette hypothèse sont recueillies et envisagées dans le chapitre I.

Le chapitre II est consacré à une conséquence extrêmement importante de l'hypothèse du continu, tirée en 1914 par M. N. Lusin; j'en déduis une série d'autres conséquences, dont quelques unes sont très récentes ou même publiées ici pour la première fois. Le chapitre III contient l'étude des relations entre la catégorie de Baire et la mesure de Lebesgue autant qu'elles découlent de l'hypothèse du continu. Un grand nombre d'autres conséquences de cette hypothèse sont traitées dans le chapitre IV.

Les rapports entre l'hypothèse du continu, qui est en dernier lieu une proposition de pure *existence*[1]), et les ainsi dits *problèmes d'effectivité* occupent le chapitre VI. Les chapitres V et VII sont consacrés respectivement à deux hypothèses, l'une peut être plus faible (celle des *alephs inaccessibles*) et l'autre peut être plus forte *(l'hypothèse de Cantor sur les alephs)* que l'hypothèse du continu.

Enfin, le supplément à la fin du livre contient une méthode imaginée tout récemment par M. N. Lusin pour éliminer l'hypothèse du continu de quelques propositions déduites de cette hypothèse.

Sans prétendre d'epuiser *toutes* les conséquences ou applications de l'hypothèse du continu qui soient connues dans la littérature mathématique, je me suis proposé d'en exposer ici au moins celles qui me semblent importantes et d'en étudier les rap-

[1]) à savoir, de l'existence d'une correspondance biunivoque entre l'ensemble de tous les nombres réels et celui des nombres ordinaux transfinis de deuxième classe.

ports mutuels (cf. la table des relations, p. 178). Bien entendu, j'ai taché avant tout de me tenir au côté mathématique et non philosophique de la question.

La lecture du livre n'exige de la part du lecteur qu'une connaissance élémentaire des notions fondamentales de la Théorie générale des ensembles et de leurs principales propriétés (cf. p. ex. le début des tomes I, II et surtout du tome III de cette collection). J'emploie les notations usuelles; les autres sont recueillies p. 8.

En terminant, je tiens à exprimer ici mes remerciements à M. Bronisław Knaster, qui n'a ménagé ni son temps ni son travail à relire le manuscrit et et la plupart des épreuves de ce livre, et auquel je dois quelques précieux conseils concernant le groupement d'une partie des matériaux, de même que plusieurs remarques positives en matière du texte.

Wacław Sierpiński.

Varsovie, Avril 1934.

INTRODUCTION.

L'hypothèse du continu et le problème du continu.

On dit que deux ensembles M et N (formés d'éléments quelconques) ont la *même puissance,* s'il existe entre leurs éléments une correspondance biunivoque (c'est-à-dire, si leurs éléments peuvent être rangés en couples d'une manière que chaque couple contienne un élément de l'ensemble M et un élément de l'ensemble N, tout élément de M ou de N ayant son couple).

Les ensembles qui ont la même puissance que l'ensemble de tous les nombres naturels (1, 2, 3, ...) sont dits *dénombrables.* Les ensembles qui ont la même puissance que l'ensemble de tous les nombres réels sont dits *de puissance du continu.* Les ensembles connus formés de nombres réels ou bien de points d'un espace euclidien à un nombre quelconque de dimensions sont soit finis, soit dénombrables, soit de puissance du continu. On ne connait notamment aucun ensemble individuel de nombres réels dont on sache qu'il n'est ni fini, ni dénombrable, ni de puissance du continu. Cependant, malgré tous les efforts, on ne sait pas démontrer que ces cas doivent se présenter toujours.

L'hypothèse du continu (Cantorsche Kontinuumhypothese) peut être exprimée d'une façon élémentaire comme l'hypothèse que tout ensemble indénombrable de nombres réels a la puissance du continu.

Si l'hypothèse du continu est vraie, la théorie des ensembles subira d'importantes simplifications. Tout d'abord, on saura quel-

les peuvent être les puissances des sous-ensembles d'un des ensembles les plus importants pour l'Analyse Mathématique: à savoir de celui de tous les nombres réels. Ensuite, pour démontrer qu'un ensemble infini de nombres réels a la puissance du continu (ce qu'il est souvent important de savoir), il suffira de prouver qu'il n'est pas dénombrable. Plusieurs démonstrations connues pourraient donc être remplacées par les démonstrations beaucoup plus simples.

Or, on a tiré de l'hypothèse du continu maintes conséquences, dont aucune n'a conduit à une contradiction et dont plusieurs ont été ensuite démontrées sans cette hypothèse. D'autre part, plusieurs propositions importantes de diverses branches des Mathématiques ne peuvent être démontrées à l'état actuel de la science qu'en faisant intervenir l'hypothèse du continu. On connait même un certain nombre de propositions intéressantes qui sont équivalentes à cette hypothèse.

Tout cela justifie le vif intérêt que présente l'hypothèse du continu. Même pour les personnes qui ne reconnaissent par les raisonnements basés sur cette hypothèse, il est important de savoir quelles sont les démonstrations qui l'utilisent et quelles sont les propositions qu'actuellement on ne sait pas démontrer sans faire appel à cette hypothèse (ou à une de ses conséquences).

Une autre manière d'énoncer l'hypothèse du continu est liée à la notion d'*ordre*.

Un ensemble donné U est dit *ordonné*, si a et b étant deux éléments distincts de U, il est convenu qu'un de ces éléments, et notamment lequel, soit regardé comme précédent l'autre; on écrit $a \prec b$ pour désigner que a précède b. La convention en question peut être d'ailleurs quelconque, mais elle doit vérifier (pour tous les éléments a, b, c de U) les deux conditions suivantes: 1° la relation $a \prec b$ exclut la relation $b \prec a$ et 2° les relations $a \prec b$ et $b \prec c$ entraînent la relation $a \prec c$.

Si, dans un ensemble ordonné U, il y a un élément qui n'est précédé par aucun autre élément de cet ensemble, on l'appelle *premier* élément de l'ensemble U.

Un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble non vide admet le premier élément est dit *bien ordonné*.

Etant donné un élément a de l'ensemble bien ordonné B, l'ensemble de tous les éléments de B qui précèdent a s'appelle *segment* de B.

On démontre que tous les ensembles bien ordonnés indénombrables dont tous les segments sont finis ou dénombrables ont la même puissance, qui est désignée par $\aleph_1$ *(aleph-un)*.

Par *hypothèse du continu* on entend d'habitude l'hypothèse que la puissance du continu est aleph-un, ce qu'on peut écrire (en faisant l'emploi des puissances des nombres cardinaux [1]) sous la forme de l'égalité:

$$(1) \qquad 2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

(où $\aleph_0$ désigne la puissance d'ensemble dénombrable et, par suite, $2^{\aleph_0}$ celle du continu). Dans la suite nous appellerons cette égalité *hypothèse* ***H***.

On ne sait pas jusqu'à présent si l'égalité (1) est vraie ou non [2]). Il existe même des personnes qui ne croient pas à la possibilité de résoudre ce problème sans admettre un nouvel axiome.

---

[1]) Voir mes *Leçons sur les nombres transfinis*, Collection Borel, Paris 1928, où le lecteur pourra compléter ses connaissances des éléments de la Théorie générale des ensembles, *avant* de continuer la lecture de la présente monographie. Il pourra se servir aussi des chapitres initiaux de trois premiers tomes de ces „Monografje Matematyczne", où diverses parties de la théorie en question sont rappelées en abrégé.

[2]) En 1925 M. D. Hilbert a publié un Mémoire *(Über das Unendliche*, Math. Annalen 95, p. 161 — 190), dans lequel il s'occupe de la démonstration de la formule (1). D'après M. A. Fraenkel *(Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre*, Leipzig u. Berlin 1927, p. 37 et p. 92) ce n'est plutôt qu'une esquisse de démonstration, liée encore avec des grandes difficultés, car plusieurs lemmes essentiels restent à établir (cf. aussi A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, 3-me éd., Berlin 1928, p. 67, p. 301 et p. 375). Voici encore l'opinion de M. N. Lusin (Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa Ser. II, vol. II (1933), p. 269):

Au premier regard on pourrait penser que la formule (1) équivaut à la proposition que tout ensemble indénombrable de nombres réels a la puissance du continu. La démonstration d'une telle équivalence peut être en effet donnée sans peine, mais on

---

„Pour montrer que la proposition «la puissance du continu est $\aleph_1$» est non contradictoire dans le domaine de l'Analyse Mathématique, M. David Hilbert établit une correspondance univoque et réciproque entre les *définitions* mêmes des nombres irrationnels d'une part et des nombres transfinis de deuxième classe d'autre part. Ainsi sa méthode diffère sensiblement de l'ordre d'idées indiqué, où l'on cherchait à établir l'existence (ou l'absence) d'une correspondance entre les *nombres mêmes* irrationnels et transfinis, sans se préoccuper de la manière dont *nous* concevons les nombres irrationnels ou transfinis. Bref, dans le terrain des idées de G. Cantor et des analystes qui étaient d'accord avec lui, on n'abordait nullement les développements métamathématiques.

En attendant des nouvelles publications dans la voie ouverte par les idées de M. David Hilbert, nous allons faire ici deux remarques.

D'abord, en analysant les définitions mêmes des divers nombres irrationnels, la méthode de M. David Hilbert emploie les expressions métamathématiques dites *fonctionnelles:* on définit un nombre irrationnel au moyen d'une fonctionnelle et la méthode de M. David Hilbert fait la classification de ces fonctionnelles. Mais avant d'obtenir des explications définitives, il reste encore un point à éclaircir: comment sommes-nous certains que *toutes* les espèces possibles des fonctionnelles soient réellement épuisées et qu'il ne puisse arriver qu'un nombre irrationnel dont on ne conçoit pas la définition *à présent* échappe à nos raisonnements ultérieurs?

Ensuite une certaine proximité de la méthode de M. David Hilbert aux raisonnements de J. Richard peut inspirer quelques craintes. Sans doute ce raisonnement: «Prenons toutes les définitions métamathématiques des nombres irrationnels et énumérons-les au moyen des entiers positifs; puis faisons de même avec les définitions des nombres transfinis, etc.» serait trop simpliste, parce que cette énumération même n'appartient probablement pas au domaine de la métamathématique. Cependant le raisonnement de J. Richard est une épreuve pour ceux qui veulent pénétrer dans les mystères de l'infini ainsi qu'indique avec toute raison M. Emile Borel".

Cf. aussi N. Lusin, *Sur les voies de la théorie des ensembles,* Atti del Congr. Intern. dei Matematici, Bologna 1928, t. I, p. 295 et suivantes.

doit faire appel à l'axiome de M. Zermelo *(Auswahlpostulat)* [1]). Nous ne savons pas, en effet, démontrer sans l'axiome du choix que tout ensemble ayant la même puissance que chacun de ses sous-ensembles indénombrables a la puissance $\aleph_1$, ni, non plus, que tout ensemble non dénombrable — même que tout ensemble de puissance du continu — a une puissance supérieure ou égale à $\aleph_1$ [2]). Or, nous savons démontrer sans l'axiome de M. Zermelo que la formule (1) entraîne la proposition suivante: tout ensemble indénombrable de nombres réels a la puissance du continu (puisque tout sous-ensemble indénombrable d'un ensemble de puissance $\aleph_1$ a la puissance $\aleph_1$).

On entrevoit déjà quelles simplifications importantes subirait la théorie des ensembles de points, si l'hypothèse du continu était démontrée. L'hypothèse du continu implique, en outre, l'existence d'un ensemble bien ordonné de puissance du continu; donc, dans le cas où la formule (1) était vraie, on pourrait démontrer sans faire appel à l'axiome du choix tous les théorèmes dont la démonstration s'appuie sur l'existence d'un ensemble bien ordonné formé de tous les nombres réels, c. à d. sur un cas particulier du théorème de M. Zermelo *(Wohlordnungssatz)*.

Il faut distinguer entre *l'hypothèse du continu* et le *problème du continu* (Kontinuumproblem), qui consiste à déterminer la place occupée par le continu parmi les *alephs*, c. à d. à déterminer le nombre ordinal α pour lequel

$$2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha.$$

Une telle position du problème présume, naturellement, que la puissance du continu est un *aleph*, c. à d. suppose l'existence d'un ensemble bien ordonné de puissance du continu. Dans le

---

[1]) Voir p. ex. mon livre *Leçons sur les mombres transfinis*, Collection Borel, Paris 1928, p. 208.

[2]) Cf. mon mémoire *L'axiome de M. Zermelo...*, Bulletin de l'Acad. des Sc. de Cracovie, 1918.

cas où l'hypothèse du continu était vraie, on aurait ici évidemment $\alpha = 1$; or, il n'est pas encore démontré qu'on n'a pas $\alpha = 2$. On a cependant démontré qu'on ne peut pas avoir $\alpha = \omega$: c'est un théorème de J. König; sa démonstration peut être donnée sans utiliser l'axiome de M. Zermelo)[1].

Tout d'abord nous démontrerons ce

Théorème. *Etant donnée une suite infinie*

(1) $$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$$

d'ensembles de nombres réels dont chacun a une puissance inférieure à celle du continu, il existe un nombre réel qui n'appartient à aucun ensemble de la suite (1).

Démonstration. Comme on sait, chaque ensemble parfait P contient une famille F_P *de puissance du continu* de sous-ensembles parfaits de P *disjoints*, c. à d. sans éléments communs deux à deux.

Soit P_0 un ensemble linéaire parfait et borné. L'ensemble E_1 étant de puissance inférieure à celle du continu et la famille F_{P_0}, formée d'ensembles (parfaits) disjoints, étant de puissance du continu, il existe un ensemble P_1 de la famille F_{P_0} qui n'a aucun élément commun avec E_1. Pareillement, il existe un ensemble P_2 de la famille F_{P_1} tel que $P_2 E_2 = 0$, et ainsi de suite. On obtient de cette manière une suite infinie d'ensembles $P_1, P_2, P_3, \ldots$ tels que l'on a pour $n = 1, 2, \ldots$

(2) $$P_n \in F_{P_{n-1}}$$ et (3) $$P_n E_n = 0.$$

Il résulte de (2) d'après la définition de la famille F_P que $P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \ldots$ Les ensembles P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ étant fermés, non vides et bornés (en tant que contenus dans l'ensemble borné P_0), il existe, comme on sait, un point p tel que $p \in P_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et on conclut de (3) que p n'appartient à aucun des ensembles E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, c. q. f. d.

---

[1]) Cf. N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur une propriété du continu*, C. R. Paris, t. 175.

Corollaire. $\mathfrak{m}_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *étant une suite infinie de nombres cardinaux tels que* $\mathfrak{m}_n < 2^{\aleph_0}$ *pour* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *on a aussi* $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots < 2^{\aleph_0}$.

En effet, supposons par contre que $\mathfrak{m}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) soit une suite infinie de nombres cardinaux telle que $\mathfrak{m}_n < 2^{\aleph_0}$ et que $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{m}_3 + \ldots = 2^{\aleph_0}$.

Il existerait donc (selon la définition de la somme de nombres cardinaux) dans l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels une suite infinie d'ensembles disjoints E_n ($n = 1, 2, \ldots$) telle que l'on ait $\overline{\overline{E}}_n = \mathfrak{m}_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et que $E_1 + E_2 + E_3 + \ldots = \mathcal{E}$. Or, comme $\mathfrak{m}_n < 2^{\aleph_0}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, cela contredit le théorème.

Le théorème de J. König est une conséquence immédiate de ce corollaire et de la formule $\aleph_\omega = \aleph_1 + \aleph_2 + \aleph_3 + \ldots$

Plus généralement, on peut démontrer l'impossibilité de la formule $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$ où α est un nombre transfini de deuxième classe et de seconde espèce: à ce but il faut seulement s'appuyer sur la remarque que pour des tels nombres α on a $\aleph_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} \aleph_\xi$. On peut démontrer aussi que α ne peut être un nombre ordinal de seconde espèce, confinal avec ω.

C'est tout ce qu'on sait sur le rang du nombre $2^{\aleph_0}$ dans l'échelle des alephs.

Notre démonstration du théorème de J. König fait intervenir l'axiome du choix, mais, comme on voit sans peine, le théorème de J. König peut être démontré sans faire appel à cet axiome. Cela résulte du fait que l'hypothèse d'après laquelle la puissance du continu est $\aleph_\omega$ contient l'hypothèse que voici: „le continu peut être regardé comme un ensemble bien ordonné"; or, cette hypothèse, sans appel à un nouvel axiome, rend superflu dans le raisonnement ultérieur le recours à l'axiome du choix.

*

NOTATIONS.

L'ensemble de tous les nombres *naturels* (c. à d. entiers positifs) sera désigné par $\mathcal{D}$,

l'ensemble de tous les nombres *rationnels* par $\mathcal{R}$,

„ „ „ *irrationnels* par $\mathcal{N}$,

„ „ „ *réels* par $\mathcal{E}$,

„ „ „ de l'*intervalle* [0,1] par $\mathcal{J}$.

CHAPITRE I.

Propositions équivalentes à l'hypothèse du continu.

Proposition P_1. *L'ensemble de tous les points du plan est une somme de deux ensembles dont l'un est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et l'autre est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses* [1]).

1° $H \to P_1$. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant (sans faire usage de l'hypothèse H).

Lemme. *Le plan est une somme de deux ensembles, dont l'un est de puissance* $< 2^{\aleph_0}$ *sur toute droite parallèle à l'axe d'ordonnées et l'autre est de puissance* $< 2^{\aleph_0}$ *sur toute droite parallèle à l'axe d'abscisses* [2]).

Démonstration. Il résulte du théorème de M. Zermelo qu'il existe une suite transfinie

$$\text{(i)} \qquad t_1, t_2, t_3, \dots, t_\omega, t_{\omega+1}, \dots, t_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \varphi)$$

formée de tous les nombres réels; nous pouvons supposer que le type φ de cette suite est le plus petit nombre ordinal de puissance du continu.

---

[1]) Cette proposition a été démontrée par moi en 1919; voir *Bull. Acad. Sc. Cracovie,* Séance du 24 Février 1919. Voir aussi *Fund. Math.* V, p. 179.

[2]) Voir ma note des Comptes rendus de le Soc. des Sc. et des Lettres de Varsovie, Classe III, XXV (1932), p. 9—10.

Soit P l'ensemble de tous les points (x, y) du plan; désignons par A l'ensemble de tous les points (t_α, t_β) où $\beta \leqslant \alpha < \varphi$ et posons $B = P - A$.

Soit a un nombre réel donné: c'est donc un terme de la suite (i), p. ex. $a = t_\alpha$, où α est un nombre ordinal $< \varphi$. Les points de l'ensemble A à l'abscisse $x = a$ sont des points (t_α, t_β), où $\beta \leqslant \alpha$; comme $\alpha < \varphi$, on a $\bar{\bar{\alpha}} < 2^{\aleph_0}$ et il en résulte que la droite $x = a$ contient un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points de A.

Or, soit b un nombre réel donné, p. ex. $b = t_\beta$.

Les points de $B = P - A$ à l'ordonnée $y = b$ sont, comme on voit sans peine, des points (t_α, t_β) où $\alpha < \beta$; d'après $\beta < \varphi$ on a $\bar{\bar{\beta}} < 2^{\aleph_0}$ et on en conclut que la droite $y = b$ contient un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points de B. Le lemme est ainsi démontré.

La proposition $\boldsymbol{P}_1$ résulte aussitôt de notre lemme et de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. L'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_1$ est ainsi démontrée.

2° $\boldsymbol{P}_1 \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_1$ et soit $P = A + B$ la décomposition du plan dont il s'agit dans cette proposition.

Soient E un ensemble formé de $\aleph_1$ parallèles à l'axe d'ordonnées et N l'ensemble de tous les points de A qui sont situés sur les parallèles formant l'ensemble E. Comme E contient $\aleph_1$ droites et toute droite de E contient un ensemble au plus dénombrable de points de A (d'après la propriété de A) l'ensemble N est de puissance $\leqslant \aleph_1$. Il en résulte à plus forte raison que la projection orthogonale Π de l'ensemble N sur l'axe d'ordonnées est de puissance $\leqslant \aleph_1$.

Je dis que Π contient tous les points de l'axe d'ordonnées. En effet, soit $(0, b)$ un point donné quelconque de cet axe. La droite $y = b$ contient (d'après la propriété de l'ensemble B) un ensemble au plus dénombrable de points de B; or, cette droite rencontre les parallèles formant E dans un ensemble de points de puissance $\aleph_1$: parmi ces points il y a donc (une infinité indénombrable) des points qui appartiennent à A (comme n'apparte-

nant pas à B) et leur projection sur l'axe d'ordonnées, notamment le point $(0, b)$, appartient à Π (d'après la définition de Π).

Nous avons ainsi démontré que Π contient tous les points de l'axe d'ordonnées: la puissance de l'ensemble Π est donc égale à celle du continu; or, comme nous savons, la puissance de Π ne dépasse pas $\aleph_1$. Il en résulte tout de suite que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$; il est ainsi démontré que $\boldsymbol{P}_1 \rightarrow \boldsymbol{H}$.

L'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{H}$ se trouve donc établie.

Convenons à présent d'appeler ici *courbe* tout ensemble des points (x, y) du plan qui satisfont à l'équation de la forme

$$y = f(x) \qquad \text{ou} \qquad x = f(y)$$

où f est une fonction univoque d'une variable réelle.

De la proposition $\boldsymbol{P}_1$ on déduit facilement [1]) la

Proposition $\boldsymbol{P}_2$. *Le plan est une somme d'une infinité dénombrable de courbes.*

En effet, soit $P = A + B$ la décomposition du plan qui satisfait aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_1$. En ajoutant à l'ensemble A tous les points du plan dont l'ordonnée est rationnelle, et à l'ensemble B tous les points du plan dont l'abscisse est rationnelle, on obtient évidemment une nouvelle décomposition du plan $P = A_1 + B_1$, où l'ensemble A_1 est dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et B_1 est dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses. L'ensemble A_1, ainsi que B_1, se compose donc d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun admet un et un seul point sur chaque droite parallèle respectivement à l'axe d'ordonnés et à l'axe d'abscisses. Chacun de ces ensembles est donc une courbe (dans le sens adopté plus haut). Il est ainsi démontré que $\boldsymbol{P}_1 \rightarrow \boldsymbol{P}_2$.

---

[1]) d'après une remarque de M. N. Lusin. Cf. mon livre *Zarys Teorji Mnogości I* (en polonais), Warszawa 1928, p. 229 et *C. R. Soc. Sc. Varsovie XXV*, p. 11.

On voit sans peine que, réciproquement, $\boldsymbol{P}_2 \rightarrow \boldsymbol{P}_1$.

Admettons en effet, que le plan soit une somme d'une infinité dénombrable de courbes et désignons par A et B les sommes de toutes les courbes de la forme $y = f(x)$ et de la forme $x = f(y)$ respectivement. Il est évident que les ensembles A et B satisfont aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_1$, de sorte que $\boldsymbol{P}_2 \rightarrow \boldsymbol{P}_1$.

Les propositions $\boldsymbol{P}_1$ et $\boldsymbol{P}_2$ sont donc équivalentes. La proposition $\boldsymbol{P}_1$ étant, comme nous avons démontré plus haut, équivalente à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, la proposition $\boldsymbol{P}_2$ l'est donc aussi.

Il est à remarquer que si, dans l'espace à 3 dimensions, on appelle *courbe* l'ensemble de tous les points (x, y, z) qui satisfont aux équations $y = f(x)$, $z = g(x)$ ou aux équations $x = f(y)$, $z = g(y)$ ou encore aux équations $x = f(z)$, $y = g(z)$, f et g désignant des fonctions univoques d'une variable réelle, on peut démontrer que l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ équivaut à la proposition suivante [1]:

Proposition $\boldsymbol{P}_{2^a}$. *L'espace à trois dimensions est une somme d'une infinité dénombrable de courbes.*

Proposition $\boldsymbol{P}_3$. *Il existe une suite infinie de fonctions univoques d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$, telle que, quel que soit l'ensemble non dénombrable N de nombres réels, toutes les fonctions de la suite, sauf peut être un nombre fini, transforment N en ensemble de tous les nombres réels* [2]).

1⁰ $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_3$. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Il existe donc une suite transfinie du type Ω,

---

[1]) Cela résulte sans peine d'une proposition sur l'espace à trois dimensions, que j'ai démontrée (à l'aide de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$) dans *C. R. Soc. Sc. Varsovie XXV*, p. 10.

[1]) Cf. S. Braun et W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 2, Propositon (*R*); W. Sierpiński, *Bull. Acad. Serbe* (Glas) CLII (1932), p. 168 et *Fund. Math.* XX, p. 163.

$$x_\omega, x_{\omega+1}, x_{\omega+2}, \dots, x_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega)$$

formée de tous les nombres réels différents.

L'ensemble de toutes les suites infinies de nombres réels, ainsi que l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres naturels, ayant la puissance du continu, donc, d'après notre hypothèse, la puissance $\aleph_1$, il résulte tout de suite de la formule $\aleph_1^2 = \aleph_1$, qu'il existe une correspondance d'après laquelle à tout nombre ordinal $a < \Omega$ correspond une suite infinie de nombres réels $(t_1^\alpha, t_2^\alpha, t_3^\alpha, \dots)$ et une suite infinie de nombres naturels $(n_1^\alpha, n_2^\alpha, n_3^\alpha, \dots)$ telles que, quelle que soient la suite infinie de nombres réels $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ et la suite infinie de nombres naturels $(n_1, n_2, n_3, \dots)$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$ remplissant les égalités $x_k = t_k^\alpha$ et $n_k = n_k^\alpha$ pour $k = 1, 2, 3, \dots$

α étant un nombre ordinal transfini $< \Omega$, l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\xi < \alpha$ est dénombrable et il existe une suite infinie

$$\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha, \xi_3^\alpha, \dots$$

formée de tous ces nombres.

Soit x un nombre réel donné. Il existe donc un nombre ordinal transfini bien déterminé $\alpha < \Omega$, tel que $x = x_\alpha$. Posons pour k naturels

$$(1) \qquad f_k(x) = t_{n_k^{\xi_k^\alpha}}^{\xi_k^\alpha}.$$

Les fonctions $f_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ sont ainsi définies pour tous les x réels. Je dis qu'elles satisfont aux conditions de la proposition P_3.

En effet, soit N un ensemble non dénombrable de nombres réels et admettons qu'il existe dans la suite $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ une infinité des fonctions qui ne transforment pas l'ensemble N en ensemble de tous les nombres réels. Il existe donc une suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \dots$ et une suite infinie de nombres réels $y_1, y_2, y_3, \dots$ tels que

(2) $$y_k \; non\text{-}\epsilon \; f_{m_k}(N).$$

Comme nous savons, il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$ tel que

(3) $$m_k = n_k^\mu \quad et \quad y_k = t_{m_k}^\mu \quad pour \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Soit maintenant α un nombre ordinal tel que $\mu < \alpha < \Omega$. Il existe donc un indice k tel que $\mu = \xi_k^\alpha$, d'où d'après (3):

$$y_k = t_{n_k^{\xi_k^\alpha}}^{\xi_k^\alpha}.$$

D'après la formule (1), qui définit la fonction $f_k(x)$, on a donc $f_k(x_\alpha) = y_k$, ce qui prouve d'après (2) que x_α *non*-ϵ N.

Nous avons donc x_α *non*-ϵ N pour $\alpha > \mu$, de sorte que l'ensemble N est au plus dénombrable, contrairement à l'hypothèse.

Toutes les fonctions de la suite $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$, sauf peut-être un nombre fini, transforment donc l'ensemble N en ensemble de tous les nombres réels. L'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_3$ est ainsi démontrée.

2⁰ $\boldsymbol{P}_3 \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_3$ et soit N un ensemble de nombres réels de la puissance $\aleph_1$. D'après $\boldsymbol{P}_3$ il existe un indice n tel que $f_n(N) = \mathcal{E}$.

Or, $f_n(x)$ étant une fonction univoque d'une variable réelle et l'ensemble N étant de puissance $\aleph_1$, l'ensemble $f_n(N)$ (qui coïncide avec l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels) est donc de puissance $\leqslant \aleph_1$. Par conséquent $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$, ce qui donne $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Nous avons ainsi démontré que $\boldsymbol{P}_3 \rightarrow \boldsymbol{H}$.

L'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_3$ et $\boldsymbol{H}$ est ainsi établie.

Il est à remarquer que la proposition $\boldsymbol{P}_1$ peut être déduite directement de la proposition $\boldsymbol{P}_3$ comme il suit: J_n désignant l'image géométrique de la fonction $f_n(x)$, c. à d. l'ensemble de tous les points (x, y) du plan P, tels que $f_n(x) = y$, on pose $A = J_1 + J_2 + J_3 + \dots$ et $B = P - A$ et on démontre facilement [1]) que les ensembles A et B ainsi définis satisfont aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_1$.

---

[1]) Voir *Fund. Math.* XX, p. 165.

Proposition P_{3^a}. *Il existe une fonction d'une variable réelle $f(x)$ à une infinité dénombrable de valeurs* (c. à d. faisant corespondre à tout nombre réel x un ensemble dénombrable $f(x)$) *qui transforme tout ensemble indénombrable de nombres réels en ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels.*

1° $H \to P_{3^a}$. Il suffit évidemment de montrer que $P_3 \to P_{3^a}$. Admettons donc la proposition P_3 et soit $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ une suite infinie de fonctions (réelles) d'une variable réelle qui satisfait aux conditions de la proposition P_3. Etant donné un nombre réel x, désignons par $f(x)$ l'ensemble (évidemment dénombrable) formé d'ensemble $\mathcal{D}$ (de tous les nombres naturels) et de tous les nombres réels qui sont termes de la suite infinie $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ Soit N un ensemble non dénombrable quelconque de nombres réels. D'après la condition de la proposition P_3, il existe un nombre naturel n tel que $f_n(N) = \mathcal{E}$. Or, la définition de la fonction-ensemble $f(x)$ entraîne tout de suite que $f(N) \supset f_n(N)$. On a par conséquent $f(N) \supset \mathcal{E}$, ce qui donne aussisôt $f(N) = \mathcal{E}$. La fonction-ensemble $f(x)$ satisfait donc aux conditions de la proposition P_{3^a}. Il est ainsi démontré que $P_3 \to P_{3^a}$.

2 $P_{3^a} \to H$. Admettons la proposition P_{3^a}; soit $f(x)$ la fonction-ensemble qui satisfait aux conditions de cette proposition. Soit N un ensemble arbitraire de nombres réels de puissance $\aleph_1$: d'après la propriété de $f(x)$, on a $f(N) = \mathcal{E}$. Or, $f(x)$ étant une fonction à une infinité dénombrable de valeurs et N étant un ensemble de puissance $\aleph_1$, l'ensemble $f(N)$ est évidemment de puissance $\aleph_1$. L'ensemble $\mathcal{E}$ est donc de puissance $\aleph_1$, de sorte que $2^{\aleph} = \aleph_1$. Il est ainsi démontré que $P_{3^a} \to H$.

Les propositions P_{3^a} et H sont donc équivalentes.

Proposition P_4. *Il existe un système d'ensembles A_x^i (où i est un nombre naturel et x un nombre réel) tel que*

1) $$\mathcal{E} = \sum_{x \in \mathcal{E}} A_x^i, \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots;$$

2) $$A_x^i A_y^i = 0 \quad \textit{pour} \quad x \neq y, \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

et que

3) *N étant un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels, il existe un nombre naturel p tel que pour $i \geqslant p$ et pour tout nombre réel x l'ensemble $N \cdot A_x^i$ est non vide.*

1⁰ $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_4$. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Elle entraîne, comme nous venons de montrer, la proposition $\boldsymbol{P}_3$. Soit $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ une suite infinie de fonctions d'une variable réelle, satisfaisant aux conditions de la propositions $\boldsymbol{P}_3$.

i étant un indice naturel et x un nombre réel donnés, posons

$$A_x^i = \underset{t}{E}\,[f_i(t) = x], \tag{4}$$

c. à d. désignons par A_x^i l'ensemble de tous les nombres réels t tels que $f_i(t) = x$.

Il est évident que le système d'ensembles A_x^i satisfait aux conditions 1) et 2), puisque, d'après (4), on a d'une part $t \in A_{f_i(t)}^i$ pour tout nombre réel t et tout i naturel et d'autre part la formule $t \in A_x^i A_y^i$ entraîne $f_i(t) = x$ et $f_i(t) = y$, d'où $x = y$.

Or, soit N un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels. D'après la propriété de la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$, il existe un indice p tel que $f_i(N) = \mathcal{E}$ pour $i \geqslant p$. Pour tout nombre naturel $i \geqslant p$ et tout nombre réel x il existe donc un nombre $t_x^{(i)}$ de N tel que $f_i(t_x^{(i)}) = x$. Il en résulte d'après (4) que $t_x^{(i)} \in A_x^i$, ce qui prouve que $NA_x^i \neq 0$ pour $i \geqslant p$, c. à d. que le système d'ensembles A_x^i satisfait également à la condition 3) de la proposition $\boldsymbol{P}_4$.

2⁰ $\boldsymbol{P}_4 \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons maintenant la proposition $\boldsymbol{P}_4$ et soit N un ensemble de nombres réels de puissance $\aleph_1$. D'après 3) il existe un indice i tel que l'ensemble NA_x^i est non vide pour tout x réel. Il en résulte d'après 2) que l'ensemble N admet au moins un point commun avec tout ensemble d'une famille formée de $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints. Il s'en suit que N est de puissance $\geqslant 2^{\aleph_0}$. Or, N étant par hypothèse de puissance $\aleph_1$, on conclut que $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$ et par conséquent que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, c. à d. que l'on a la proposition $\boldsymbol{H}$.

L'équivalence des propositions P_4 et H est ainsi démontrée.

Il est à remarquer que la condition 3) équivaut à la condition 3') que voici:

3') *N étant un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels, il existe un nombre naturel p tel que pour tout $i \geqslant p$ et pour tout nombre réel x l'ensemble NA_x^i est indénombrable.*

Il suffit évidemment de montrer que 3) → 3').

Soient donc: A_x^i un système d'ensembles qui satisfait à la condition 3) et N un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels. L'ensemble N est évidemment la somme d'une famille indénombrable d'ensembles indénombrables disjoints et nous pouvons poser $N = \sum_{\alpha<\Omega} N^\alpha$, où N^α $(\alpha < \Omega)$ sont des ensembles indénombrables et $N^\alpha N^\beta = 0$ pour $\alpha < \beta < \Omega$.

Or, le système des ensembles A_x^i satisfaisant à la condition 3), il existe pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ un nombre naturel p_α tel que l'on a $N^\alpha A_x^i \neq 0$ pour tout indice naturel $i \geqslant p_\alpha$ et tout x réel. L'ensemble des indices naturels étant dénombrable et l'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ ne l'étant pas, il y a évidemment une infinité indénombrable de termes de la suite transfinie $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ qui sont égaux au même nombre naturel p. Il existe donc une suite infinie croissante de nombres ordinaux $\{\alpha_\xi\}$ $(\xi < \Omega)$ telle que $p_{\alpha_\xi} = p$ pour $\xi < \Omega$. Il en résulte en vertu de la définition des nombres p_α que $N^{\alpha_\xi} A_x^i \neq 0$ pour $i \geqslant p$ et pour tout x réel. Les ensembles A_x^i ont donc, pour $i \geqslant p$ et pour tout x réel, au moins un élément commun avec tout ensemble N^{α_ξ} où $\xi < \Omega$: ces derniers ensembles étant disjoints et contenus dans N, on conclut que, pour $i \geqslant p$ et pour tout x réel, les ensembles NA_x^i sont indénombrables. Le système A_x^i satisfait donc à la condition 3'), c. q. f. d.

Nous allons prouver encore que la condition 3) équivaut à la condition 3'') que voici [1]):

[1]) Cf. S. Braun et W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 1, proposition (Q), et W. Sierpiński, *Bull. Acad. Serbe* CLII, p. 163.

3″) *Quelle que soient la suite infinie croissante de nombres naturels* $n_1, n_2, n_3, \ldots$ *et la suite infinie de nombres réels* $x_1, x_2, x_3, \ldots$, *l'ensemble* $\mathcal{E} - (A_{x_1}^{n_1} + A_{x_2}^{n_2} + A_{x_3}^{n_3} + \ldots)$ *est au plus dénombrable.*

En effet, soit A_x^i un système d'ensembles qui satisfait à la condition 3). Soient en outre: $n_1, n_2, n_3, \ldots$ une suite infinie croissante de nombres naturels et $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite infinie de nombres réels. Supposons que l'ensemble $N = \mathcal{E} - (A_{x_1}^{n_1} + A_{x_2}^{n_2} + \ldots)$ soit indénombrable. D'après 3) il existe un nombre naturel p tel que $NA_x^i \neq 0$ pour tout x réel et pour $i > p$. La suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ étant croissante, il existe un nombre naturel k tel que $n_k > p$. On a donc $NA_{x_k}^{n_k} \neq 0$, contrairement à la définition de l'ensemble N. L'ensemble $\mathcal{E} - (A_{x_1}^{n_1} + A_{x_2}^{n_2} + \ldots)$ est donc au plus dénombrable. Nous avons ainsi démontré que 3) → 3″).

Réciproquement, soient A_x^i un système d'ensembles qui satisfait à la condition 3″) et N un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels. Supposons que l'ensemble N ne satisfasse pas à la condition 3). Il existerait donc pour tout p naturel un nombre naturel $n_p > p$ et un nombre réel x_p tels que $NA_{x_p}^{n_p} = 0$. Comme $n_p > p$ pour $p = 1, 2, \ldots$, on peut extraire de la suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$ une suite infinie croissante $n_{k_1}, n_{k_2}, n_{k_3}, \ldots$ On a donc $NA_{x_{k_i}}^{n_{k_i}} = 0$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, d'où $N \subset \mathcal{E} - (A_{x_{k_1}}^{n_{k_1}} + A_{x_{k_2}}^{n_{k_2}} + \ldots)$, contrairement à la condition 3″). Nous avons ainsi démontré que 3″) → 3) et par conséquent l'équivalence des conditions 3) et 3″) se trouve établie.

Proposition P_{4^a} [1]. *Il existe un système d'ensembles* A_x^i, *où* $i = 1, 2, 3, \ldots$ *et* x *parcourt tous les nombres réels, qui satisfait aux conditions* 1) *et* 2) *de la proposition* P_4 *et à la condition* 3^a) *suivante:*

3^a) *Quel que soit le nombre réel* x, *l'ensemble* $\mathcal{E} - \sum_{i=1}^{\infty} A_x^i$ *est au plus dénombrable.*

1⁰ $H \to P_4a$. L'hypothèse H entraîne, comme nous avons vu, la proposition P_4. Or, nous venons de démontrer que la condition 3) de cette proposition équivaut à la condition 3″), et tout système d'ensembles A_x^i qui satisfait à la condition 3″) satisfait évidemment, à plus forte raison, à la condition 3^a). Il en résulte donc que $P_4 \to P_4a$ et comme $H \to P_4$, nous avons $H \to P_4a$.

2⁰ $P_4a \to H$. Admettons la propositon P_4a. Soit N un ensemble de nombres réels de puissance $\aleph_1$. D'après la condition 3^a) de la proposition P_4a, il vient $N \sum_{i=1}^{\infty} A_x^i \neq 0$, de sorte que pour tout nombre réel x il existe un nombre naturel i_x tel que $NA_x^{i_x} \neq 0$. Désignons par X_k l'ensemble de tous les nombres réels x tels que $i_x = k$. On aura évidemment $\mathcal{E} = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots$ Or, on sait qu'en décomposant un ensemble de puissance du continu en une infinité dénombrable d'ensembles, l'un au moins de ces ensembles est de puissance du continu [1]). Il existe donc un nombre naturel p tel que l'ensemble X_p est de puissance $2^{\aleph_0}$. D'après la définition de l'ensemble X_p, on a $i_x = p$ pour $x \in X_p$, donc, d'après la définition des nombres i_x, on a $NA_x^p \neq 0$ pour $x \in X_p$. Cela prouve en vertu de la condition 2) que l'ensemble N contient un ensemble de puissance $\overline{\overline{X}}_p$. Or, l'ensemble N étant de puissance $\aleph_1$ et l'ensemble X_p de puissance $2^{\aleph_0}$, il vient $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$, ce qui donne $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Nous avons ainsi démontré que $P_4a \to H$.

L'équivalence des propositions P_4a et H est donc établie.

Il est à remarquer que non seulement les conditions 3) et 3^a) ne sont pas équivalentes, mais que la condition 3) n'est même pas une conséquence des conditions 1), 2) et 3^a). En effet, en admettant qu'il existe un système d'ensembles A_x^i assujetti aux conditions 1), 2) et 3^a), nous pouvons définir un autre système d'ensembles $\overset{*}{A}{}_x^i$ qui satisfait aux conditions 1), 2) et 3^a), mais ne satisfait pas à la condition 3).

---

[1]) Voir p. ex. mes *Leçons sur les nombres transfinis,* Paris 1928, p. 135.

Posons à ce but pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ et pour tout x réel $\overset{*}{A}{}_x^{2i} = A_x^i$ et désignons pour $i = 1, 2, 3, \ldots$ par $\overset{*}{A}{}_x^{2i-1}$ l'ensemble formé d'un seul nombre x. On voit sans peine que l'on a pour tout $i = 1, 2, 3, \ldots$ les formules

$$\mathcal{E} = \sum_{x \in \mathcal{E}} \overset{*}{A}{}_x^i \quad \text{et} \quad \overset{*}{A}{}_x^i \overset{*}{A}{}_y^i = 0, \quad \text{lorsque } x \neq y.$$

Le système $\{\overset{*}{A}{}_x^i\}$ satisfait donc aux conditions 1) et 2). En outre, on a évidemment $\sum_{i=1}^{\infty} \overset{*}{A}{}_x^i \supset \sum_{i=1}^{\infty} A_x^i$ pour tout x réel, de sorte que le système $\{\overset{*}{A}{}_x^i\}$ satisfait aussi à la condition 3^a), le système $\{A_x^i\}$ satisfaisant à la condition 3^a) par hypothèse. Cependant le système $\{\overset{*}{A}{}_x^i\}$ ne satisfait pas à la condition 3), puisque l'ensemble $\overset{*}{A}{}_x^1 + \overset{*}{A}{}_x^3 + \overset{*}{A}{}_x^5 + \ldots$ est (pour tout x réel) formé d'un seul élément x.

Quant à la proposition P_{4a}, il est encore à remarquer qu'elle résulte immédiatement de l'hypothèse H et du théorème suivant de M. S. Ulam [1]) (dont la démonstration n'exige pas l'hypothèse H):

Z étant un ensemble de puissance $\aleph_1$, il existe un système d'ensembles $A_\xi^i \subset Z$, où i parcourt les nombres naturels et ξ les nombres ordinaux $< \Omega$, tels que

(i) $Z = \sum_{\xi < \Omega} A_\xi^i$ *pour* $i = 1, 2, 3, \ldots$

(ii) $A_\xi^i A_\eta^i = 0$ *pour* $i = 1, 2, 3, \ldots$ *et* $\xi < \eta < \Omega$,

et

(iii) *quel que soit le nombre ordinal $\xi < \Omega$, l'ensemble $Z - \sum_{i=1}^{\infty} A_\xi^i$ est au plus dénombrable.*

Proposition P_5. *Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ telle que, quelle que soit la suite infinie de nombres réels $y_1, y_2, y_3, \ldots$, à toute valeur de x, sauf peut-être pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs (et qui dépend*

---

[1]) *Fund. Math.* XVI, p. 142; cf. aussi W. Sierpiński, *Fund. Math.* XX, p. 214 (Lemme I).

de la suite $y_1, y_2, y_3, \ldots$), *correspond une suite infinie croissante d'indices* $k_1, k_2, k_3, \ldots$ *(dépendant de* x *et de la suite* $y_1, y_2, y_3, \ldots$) *qui satisfont à l'égalité*

$$(5) \qquad f_{k_i}(x) = y_{k_i} \qquad \textit{pour } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Démonstration. Admettons l'hypothèse H. Il en résulte, comme nous savons, la proposition P_3. Soit $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ une suite infinie de fonctions d'une variable réelle satisfaisant à la condition de la proposition P_3. Nous allons montrer qu'elle satisfait aux conditions de la proposition P_5. Soit à ce but $y_1, y_2, y_3, \ldots$ une suite infinie quelconque de nombres réels. On voit sans peine que si, pour un x réel donné, il n'existe aucune suite infinie croissante d'indices $k_1, k_2, k_3, \ldots$ telle qu'on ait la formule (5), il existe un nombre naturel q_x tel que

$$(6) \qquad f_k(x) \neq y_k \qquad \textit{pour } k \geqslant q_x.$$

Soit N l'ensemble de tous les nombres réels x pour lesquels ce cas se présente. Afin d'établir la proposition P_5, il suffit évidemment de démontrer que l'ensemble N est au plus dénombrable.

Supposons, par contre, que l'ensemble N soit indénombrable. L'ensemble $\mathcal{D}$ de tous les nombres naturels étant dénombrable, il existe évidemment un nombre naturel q tel que l'égalité $q_x = q$ se présente pour un sous-ensemble indénombrable N_1 de nombres de N. Comme la suite infinie de fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ satisfait aux conditions de la proposition P_3, il existe un nombre naturel p tel que l'on a $f_k(N_1) = \mathcal{E}$ pour tout $k \geqslant p$. On a donc $y_k \in f_k(N_1)$ pour $k \geqslant p$, de sorte que, pour tout nombre naturel $k \geqslant p$, il existe un nombre $x_k \in N_1$ tel que $y_k = f_k(x_k)$. Par conséquent

$$(7) \qquad f_k(x_k) = y_k \qquad \textit{pour } k \geqslant p.$$

Or, c'est impossible, car la définition de l'ensemble N_1 donne pour les nombres $x_k \in N_1$ en question l'égalité $q_{x_k} = q$, quel que soit $k \geqslant p$. Comme $N_1 \subset N$, on en conclut selon (6) que l'on a $f_k(x_k) \neq y_k$ pour $k \geqslant \max(p, q)$, ce qui est incompatible avec (7).

Ainsi l'ensemble N ne peut pas être dénombrable et par conséquent l'implication $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_5$ se trouve établie.

De la proposition $\boldsymbol{P}_5$ résulte tout de suite (en posant $y_i = y$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$) la

Proposition $\boldsymbol{P}_{5a}$. *Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ telle que, quel que soit le nombre réel y, la suite $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ contient pour toute valeur de x, sauf peut-être pour un ensemble au plus dénombrable des valeurs (et qui dépend de y), une infinité de termes égaux à y.*

On a donc $\boldsymbol{P}_5 \to \boldsymbol{P}_{5a}$ et nous allons prouver que $\boldsymbol{P}_{5a} \to \boldsymbol{H}$: comme $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_5$ (ce que nous venons de montrer), il en résultera que chacune des propositions $\boldsymbol{P}_5$ et $\boldsymbol{P}_{5a}$ est équivalente à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_{5a}$ et soit $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ une suite infinie de fonctions d'une variable réelle satisfaisant à la condition de la proposition $\boldsymbol{P}_{5a}$. Soient N un ensemble de nombres réels de puissance $\aleph_1$ et y un nombre réel quelconque. D'après la propriété de notre suite de fonctions, il existe des systèmes (x, p), où $x \in N$ et $p \in \mathcal{D}$, tels que $f_p(x) = y$. L'ensemble des nombres réels y ayant la puissance $2^{\aleph_0}$, il en est donc de même pour l'ensemble de tous les systèmes (x, p), où $x \in N$ et $p = 1, 2, 3, \ldots$, puisque les systèmes (p, x) et (p', x') sont nécessairement distincts, si $f_p(x) \neq f_{p'}(x')$. Or, N étant de puissance $\aleph_1$, l'ensemble de ces systèmes est de puissance $\aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1$. On a donc $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Ainsi $\boldsymbol{P}_{5a} \to \boldsymbol{H}$ et l'équivalence des propositions $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{P}_5$ et $\boldsymbol{P}_{5a}$ se trouve établie.

Proposition $\boldsymbol{P}_{5b}$[1]. *Il existe une famille F de puissance du continu de suites infinies de nombres réels telle que $y_1, y_2, y_3, \ldots$ étant une suite infinie quelconque de nombres réels, l'ensemble de toutes les suites $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de la famille F pour lesquelles on a*

[1]) Voir S. Braun et W. Sierpiński, *Fuud. Math.* XIX, p. 1, proposition (P).

$$x_k \neq y_k, \qquad \textit{quel que soit } k = 1, 2, 3, \dots,$$

est au plus dénombrable.

1⁰ $P_5 \to P_{5b}$. Admettons la proposition P_5 et soit $f_1(x), f_2(x), \dots$ une suite infinie de fonctions d'une variable réelle assujetties aux conditions de cette proposition. Désignons par F la famille de toutes les suites infinies différentes $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$, où x sont des nombres réels; on voit sans peine que cette famille est de puissance du continu.

Or, étant donnée une suite infinie quelconque de nombres réels $y_1, y_2, y_3, \dots$, la proposition P_5, qui est par hypothèse satisfaite par la suite infinie de fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$, implique que l'ensemble de tous les x réels tels que

$$f_k(x) \neq y_k \qquad \textit{pour } k = 1, 2, 3, \dots$$

est au plus dénombrable. Il en résulte tout de suite que la famille F satisfait aux conditions de la proposition P_{5b}. On a donc en effet $P_5 \to P_{5b}$.

2⁰ $P_{5b} \to H$. Admettons la proposition P_{5b}. Soit F_1 un sous-ensemble de puissance $\aleph_1$ de la famille F. L'ensemble X de tous les nombres réels qui sont des termes au moins d'une suite appartenant à F_1 est évidemment de puissance $\leqslant \aleph_1$.

Or, si on avait $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, il existerait un nombre réel y qui n'appartient pas à X, de sorte que, quelle que soit la suite $x_1, x_2, x_3, \dots$ appartenant à F_1, on aurait $x_i \neq y$ pour $i = 1, 2, \dots$; mais cela contredit la proposition P_{5b} (en y posant $y_i = y$ pour $i = 1, 2, \dots$). On ne peut donc avoir $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ et on a par suite $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Il est ainsi établi que $P_{5b} \to H$. Or, nous avons démontré plus haut que $H \to P_5$ et $P_5 \to P_{5b}$. Par conséquent les propositions H et P_{5b} sont équivalentes.

Proposition P_6. *L'ensemble de tous les nombres réels est une somme d'ensembles croissants dénombrables* [1]).

[1]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* III, p. 112 et V, p. 180.

On dit qu'une famille F est *formée d'ensembles croissants,* lorsque des deux ensembles distincts appartenant à F l'un est toujours un sous-ensemble de l'autre.

1° $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_6$. L'hypothèse $\boldsymbol{H}$ équivaut à l'existence d'une suite transfinie du type Ω formée de tous les nombres réels. Pour avoir une famille d'ensembles qui satisfait à la proposition $\boldsymbol{P}_6$, il suffit évidemment de considérer la famille de tous les segments infinis d'une telle suite transfinie.

2° $\boldsymbol{P}_6 \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_4$ et soit N un ensemble quelconque de nombres réels de puissance $\aleph_1$. Soit F la famille d'ensembles dénombrables satisfaisant à la proposition $\boldsymbol{P}_4$. A tout nombre réel x correspond donc un ensemble dénombrable $D(x)$ de la famille F tel que $x \in D(x)$. Soit S la somme de tous les ensembles $D(x)$ correspondant ainsi aux nombres x de N: l'ensemble S est évidemment de puissance $\aleph_1$. Soit maintenant x_0 un nombre réel arbitraire. L'ensemble $D(x_0)$ étant dénombrable et l'ensemble S étant indénombrable, il existe un nombre y de S qui n'appartient pas à $D(x_0)$. En vertu de la définition de S, il existe donc dans N un nombre x tel que $y \in D(x)$ et $D(x) \subset S$. Or, on a y *non*-$\in D(x_0)$: par conséquent, un des ensembles $D(x)$ et $D(x_0)$ étant contenu dans l'autre, on a nécessairement $D(x_0) \subset D(x)$, car l'inclusion $D(x) \subset D(x_0)$ est impossible, puisque $y \in D(x)$ et y *non*-$\in D(x_0)$. Comme $x_0 \in D(x_0)$ et $D(x_0) \subset D(x) \subset S$, on a $x_0 \in S$. L'ensemble S (qui est de puissance $\aleph_1$) contient donc tout nombre réel, de sorte que $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$ et par conséquent $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Nous avons ainsi démontré que $\boldsymbol{P}_6 \rightarrow \boldsymbol{H}$.

L'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_6$ et $\boldsymbol{H}$ est donc établie.

Proposition $\boldsymbol{P}_7$ [1]. *Il existe un ensemble analytique linéaire qui n'est pas une somme de moins de $2^{\aleph_0}$ ensembles mesurables* (B).

1° $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_7$. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Il existe, comme on sait, des ensembles analytiques linéaires non mesurables (B) [2].

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *Publ. de l'Univ. de Belgrade* 1934.

[2]) Voir p. ex. N. Lusin, *Fund. Math.* X, p. 70.

On voit sans peine que chaque ensemble E de ce genre satisfait à la proposition P_7, puisque s'il était une somme de moins de $2^{\aleph_0}$ ensembles mesurables (B), il serait, vu l'hypothèse H, la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles mesurables (B); mais alors l'ensemble E en question serait mesurable (B), contrairement à sa définition. On a donc bien $H \rightarrow P_7$.

2⁰ $P_7 \rightarrow H$. Admettons la proposition P_7 et soit E un ensemble analytique satisfaisant à la proposition P_7. Comme nous avons démontré avec M. Lusin[1]), tout ensemble analytique, donc en particulier l'ensemble E, est une somme de $\aleph_1$ ensembles mesurables (B). L'ensemble E n'étant pas (en vertu de P_7) une somme de moins de $2^{\aleph_0}$ ensembles mesurables (B), l'inégalité $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ ne peut se présenter. Or, on a, comme on sait, $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$ [2]). Par conséquent $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, d'où $P_7 \rightarrow H$.

L'équivalence des propositions H et P_7 est ainsi établie.

Il est à remarquer que le problème si l'hypothèse H est fausse ou vraie équivaut à celui si un certain ensemble linéaire E (analytique) non mesurable (B) et qu'on sait définir *effectivement* [3]), est ou non une somme de moins de $2^{\aleph_0}$ ensembles mesurables (B).

Proposition P_8. *Soit E est un ensemble (formé d'éléments quelconques) et Φ une famille de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ de sous-ensembles de E telle que E n'est pas une somme de $\aleph_0$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable; dans ces conditions E contient un ensemble indénombrable N qui n'admet avec tout ensemble de la famille Φ qu'un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.*

---

1) *Journal de Mathématiques* II (1923), p. 32. Cf. aussi *Fund. Math.* VIII, p. 362.

2) Il est à remarquer que la démonstration de cette inégalité utilise *l'axiome du choix* (voir p. ex. mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 208 et p. 210).

3) Voir pour cette notion ma Note de *Fund. Math.* II, p. 112 et C. Kuratowski, *Topologie I*, Monografje Matematyczne 1933, p. 109 (cf. aussi ibid. p. 175).

1° $H \to P_8$. Admettons l'hypothèse H. Soient E un ensemble quelconque (non vide) et Φ une famille de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ de sous-ensembles de E, telle que E n'est pas une somme de $\aleph_0$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable. Considérons une suite transfinie

$$(8) \qquad x_1, x_2, x_3, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \varphi),$$

formée de tous les éléments de l'ensemble E.

La famille Φ étant de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$, donc, d'après l'hypothèse H, de puissance $\leqslant \aleph_1$, il existe une suite transfinie du type Ω

$$(9) \qquad E_1, E_2, E_3, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots E_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega),$$

formée de tous les ensembles de la famille Φ (car dans le cas où cette famille est de puissance $< \aleph_1$, on peut compléter la suite (9), en répétant transfiniment un terme quelconque de cette suite).

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ d'éléments de E comme il suit. Posons $p_1 = x_1$ et désignons par P_α l'ensemble de tous les p_ξ où $1 \leqslant \xi < \alpha$ pour un $\alpha < \Omega$. Soit

$$(10) \qquad S_\alpha = \sum_{\xi < \alpha} E_\xi.$$

En vertu de l'hypothèse faite sur la famille Φ on a $E \neq P_\alpha + S_\alpha$, puisque S_α est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de la famille Φ et l'ensemble P_α est au plus dénombrable. Evidemment $S_\alpha + P_\alpha \subset E$; on a donc $E - (S_\alpha + P_\alpha) \neq 0$ et il existe par conséquent des termes de la suite (8) qui n'appartiennent pas à $S_\alpha + P_\alpha$. Nous définirons p_α comme celui de ces termes dont l'indice est le plus petit.

La suite transfinie $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ se trouve ainsi définie par l'induction transfinie.

Soit N l'ensemble de tous les termes de cette suite: c'est évidemment un ensemble non dénombrable d'éléments de E (les termes de la suite $\{p_\alpha\}$ $(\alpha < \Omega)$ étant par définition distincts deux

à deux. Soit d'autre part Q un ensemble de la famille Φ: c'est donc un terme de la suite (9) et on a par conséquent $Q = E_\mu$ pour un nombre ordinal $\mu < \Omega$. D'après la définition de la suite transfinie $\{p_\alpha\}$ on a $p_\alpha \in E - (S_\alpha + P_\alpha)$, donc p_α *non-* $\in S_\alpha$ pour $\alpha < \Omega$, et à plus forte raison p_α *non-* $\in E_\mu$ pour $\mu \leqslant \alpha < \Omega$, puisqu'on a selon (10) $E_\mu \subset S_\alpha$ pour $\mu \leqslant \alpha$. Les termes de la suite transfinie $\{p_\alpha\}$ qui appartiennent à E_μ ont donc nécessairement des indices $\alpha < \mu$: et leur ensemble est par suite au plus dénombrable (car $\mu < \Omega$). Il en résulte que l'ensemble $NE_\mu = NQ$ est au plus dénombrable.

Or, Q étant un ensemble arbitraire de la famille Φ, l'ensemble N satisfait donc à la proposition $\boldsymbol{P}_8$. Nous avons ainsi démontré que $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_8$.

2⁰ $\boldsymbol{P}_8 \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_8$ et supposons que $2^{\aleph_0} > \aleph_1$. On a donc $\aleph_2 \leqslant 2^{\aleph_0}$. Soit E un ensemble de puissance $\aleph_2$. Les éléments de E peuvent donc être rangés en une suite transfinie

$$(11) \quad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\Omega, x_{\Omega+1}, \ldots, x_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \omega_2)$$

du type ω_2, où ω_2 est le plus petit nombre ordinal de la quatrième classe de Cantor.

Soit Φ la famille de tous les segments de la suite (11): évidemment Φ est alors de puissance $\aleph_2$, donc, d'après notre hypothèse, de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$. Or, tout ensemble de la famille Φ, en tant que segment de la suite (11), est de puissance $\leqslant \aleph_1$; on voit donc sans peine que l'ensemble E (qui est de puissance $\aleph_2$) n'est pas une somme de $\aleph_0$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable (puisque $\aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1 < \aleph_2$). D'après la proposition $\boldsymbol{P}_8$ il existe par conséquent un sous-ensemble non dénombrable N de E qui admet tout au plus une infinité dénombrable d'éléments communs avec tout ensemble de la famille Φ.

Or, considérons un sous-ensemble N_1 de N de puissance $\aleph_1$ et soient x_{α_ξ} $(\xi < \Omega)$ les termes de la suite (11) qui appartiennent à N_1. Comme $\alpha_\xi < \omega_2$ pour $\xi < \Omega$, il existe, on le sait, un nombre

ordinal $\alpha < \omega_2$ tel que l'on ait $\alpha > \alpha_\xi$ pour $\xi < \Omega$. Alors le segment de la suite (11) qui vient correspondre à l'élément x_α contient évidemment tous les éléments de N_1, donc une infinité non dénombrable d'éléments de N. Mais c'est incompatible avec la propriété de l'ensemble N, car le segment en question appartient à la famille Φ. Ainsi la supposition que l'on ait $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ implique contradiction. On a donc $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ et par conséquent $\boldsymbol{P}_8 \rightarrow \boldsymbol{H}$.

Les propositions $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{P}_8$ sont donc équivalentes.

Il est à remarquer que si l'on remplace dans la proposition $\boldsymbol{P}_8$ la condition que l'ensemble N ait avec tout ensemble de la famille Φ un ensemble *au plus dénombrable* d'éléments communs par la condition qu'il ait avec tout ensemble de Φ un ensemble *de puissance* $< 2^{\aleph_0}$ d'éléments communs, la proposition $\boldsymbol{P}_8'$ ainsi obtenue peut être établie *sans faire appel à l'hypothèse* $\boldsymbol{H}$.

En effet, on a évidemment $\boldsymbol{P}_8 \rightarrow \boldsymbol{P}_8'$ et nous avons démontré plus haut que $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_8$. On a donc $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_8'$, de sorte que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la proposition $\boldsymbol{P}_8'$ est vraie. Or, la proposition $\boldsymbol{P}_8'$ est vraie aussi, lorsque $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, puisqu'il suffit alors de prendre comme N un sous-ensemble quelconque de puissance $\aleph_1$ de l'ensemble E.

Une légère modification de notre démonstration de l'équivalence entre $\boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{P}_8$ permet de montrer que l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ est équivalente à la proposition $\boldsymbol{P}_{8a}$ suivante [1]:

Proposition $\boldsymbol{P}_{8a}$. *Soit* **P** *une propriété des ensembles de nombres réels assujettie aux conditions:*

1) **P** *est une propriété héréditaire* [2],

2) **P** *est une propriété absolument additive* [3],

---

[1]) Pour plus de détails voir ma Note dans le *Bulletin de la Section Scientifique de l'Académie Roumaine*, XVIe année, N^0 4—5.

[2]) Une propriété d'ensembles est dite *héréditaire*, si elle appartient à tout sous-ensemble d'un ensemble qui en jouit.

[3]) Une propriété d'ensembles est dite *absolument additive*, si elle appartient à la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles qui en jouissent.

3) *Tout ensemble formé d'un seul nombre réel jouit de la propriété* **P**,

4) *Il existe une famille* Φ *de puissance* $\leqslant 2^{\aleph_0}$ *d'ensembles de nombres réels jouissant de la propriété* **P** *et telle que tout ensemble de nombres réels jouissant de cette propriété est contenu dans un (au moins) des ensembles de la famille* Φ;

alors chaque ensemble E *de nombres réels qui ne jouit pas de la propriété* **P** *contient un sous-ensemble non dénombrable* N *ayant tout au plus une infinité dénombrable de points communs avec tout ensemble jouissant de la propriété* **P**.

Proposition P_9 [1]. *Deux affirmations suivantes sont vraies à la fois:*

(K) *Tout ensemble linéaire de puissance inférieure à celle du continu est de première catégorie de Baire,*

(L) *Il existe un ensemble linéaire* N *de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec chaque ensemble (linéaire) parfait non-dense.*

1° $H \to P_9$. On a évidemment $H \to (K)$, puisqu'en admettant l'hypothèse H, tout ensemble de puissance inférieure à celle du continu est au plus dénombrable, donc de première catégorie de Baire.

Quant à l'implication $H \to (L)$, elle a été démontrée pour la première fois en 1914 par M. N. Lusin [2]. Nous la déduirons ici de l'implication $H \to P_8$.

Posons à ce but $E = \mathcal{E}$ et soit Φ la famille de tous les ensembles linéaires parfaits non-denses. Les ensembles au plus dénombrables étant de première catégorie et la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie quelconques étant encore un ensemble de première catégorie, on voit sans peine que la famille Φ satisfait à la proposition P_8. Or, d'après

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *Tôhoku Math. Journ.* 38, p. 225.

[2]) *C. R. Paris* t. 158, p. 1259; cf. plus loin Chap. II, proposition C_1.

cette proposition il existe un sous-ensemble N de E indénombrable, donc, d'après $\boldsymbol{H}$, de puissance $2^{\aleph_0}$, et qui admet avec chaque ensemble de la famille Φ tout au plus une infinité dénombrable d'éléments communs. Un tel ensemble N satisfait évidemment à la proposition $(\boldsymbol{L})$. On a donc $\boldsymbol{P}_8 \to (\boldsymbol{L})$.

Les implications $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_8$ et $\boldsymbol{P}_8 \to (\boldsymbol{L})$ donnent $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{L})$ et comme on a en même temps $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{K})$, il vient $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{P}_9$.

2⁰ $\boldsymbol{P}_9 \to \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_9$. Soit N un ensemble vérifiant la proposition $(\boldsymbol{L})$. Or, l'ensemble N admet alors tout au plus une infinité dénombrable de points communs avec tout ensemble linéaire de première catégorie, car tout ensemble de première catégorie est contenu dans une somme dénombrable d'ensembles parfaits non-denses.

Soit maintenant N_1 un sous-ensemble de N de puissance $\aleph_1$. Si $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, l'ensemble N_1 serait d'après $(\boldsymbol{K})$ de première catégorie et (par suite de la propriété de l'ensemble N, établie tout à l'heure) l'ensemble NN_1 serait au plus dénombrable. Or, c'est impossible, puisque $N_1 \subset N$ et N_1 est de puissance $\aleph_1$. On a par conséquent $\aleph_1 \geqslant 2^{\aleph_0}$, donc $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$.

L'implication $\boldsymbol{P}_9 \to \boldsymbol{H}$ et, en conséquence, l'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_9$ et $\boldsymbol{H}$ est ainsi établie.

Il est à remarquer que la proposition $(\boldsymbol{L}_1)$ suivante peut être démontrée sans faire appel à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$:

$(\boldsymbol{L}_1)$ *Il existe un ensemble linéaire non dénombrable N qui admet un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points communs avec chaque ensemble parfait non-dense.*

En effet, on a évidemment $(\boldsymbol{L}) \to (\boldsymbol{L}_1)$ et, comme nous venons de montrer, $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{L})$. Il vient donc $\boldsymbol{H} \to (\boldsymbol{L}_1)$, de sorte que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, la proposition $(\boldsymbol{L}_1)$ est vraie.

Or, la proposition $(\boldsymbol{L}_1)$ est encore vraie, si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, puisqu'il suffit dans ce cas de prendre comme N un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$.

La proposition $(\boldsymbol{L}_1)$ résulte d'ailleurs sans peine de la proposition $\boldsymbol{P}_8'$.

Proposition P_{9a}. *Deux affirmations suivantes sont vraies à la fois:*

(***M***) *Tout ensemble linéaire de puissance inférieure à celle du continu est de mesure nulle.*

(***S***) *Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec chaque ensemble de mesure nulle.*

1^0 $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_{9a}$. On a évidemment $\boldsymbol{H} \rightarrow (\boldsymbol{M})$, puisque, si l'on admet l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, tout ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ est au plus dénombrable, donc de mesure nulle.

Quant à l'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow (\boldsymbol{S})$, nous la déduirons ici de l'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_8$ [1]).

Posons $E = \mathcal{E}$ et soit Φ la famille de tous les ensembles linéaires G_δ de mesure nulle. La famille de tous les ensembles (linéaires) G_δ étant, comme on sait, de puissance $2^{\aleph_0}$ et les ensembles au plus dénombrables, ainsi que les sommes d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle, étant de mesure nulle, on voit sans peine que la famille Φ satisfait à la proposition $\boldsymbol{P}_8$. D'après cette proposition il existe donc un sous-ensemble N de E non dénombrable, donc selon $\boldsymbol{H}$ de puissance $2^{\aleph_0}$, et qui admet avec tout ensemble de la famille Φ, donc avec tout ensemble linéaire G_δ de mesure nulle, un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.

Or, tout ensemble linéaire de mesure (lebesguienne) nulle étant, comme on sait, contenu dans un ensemble linéaire G_δ de mesure nulle, l'ensemble N a un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble linéaire de mesure nulle. L'ensemble N satisfait donc à la proposition $(\boldsymbol{S})$. On a ainsi $\boldsymbol{P}_8 \rightarrow (\boldsymbol{S})$.

Les implications $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_8$ et $\boldsymbol{P}_8 \rightarrow (\boldsymbol{S})$ donnent $\boldsymbol{H} \rightarrow (\boldsymbol{S})$ et comme on a en même temps $\boldsymbol{H} \rightarrow (\boldsymbol{M})$, il vient $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_{9a}$.

---

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Fund. Math.* V, p. 184.

2° $\boldsymbol{P}_{9a} \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_{9a}$. Soient N un ensemble vérifiant la proposition $(\boldsymbol{S})$ et N_1 un sous-ensemble de N de puissance $\aleph_1$. Si $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, l'ensemble N_1 serait, d'après $(\boldsymbol{M})$, de mesure nulle et l'ensemble NN_1 serait, d'après la définition de N, au plus dénombrable. Or, c'est impossible, puisque $N_1 \subset N$ et N_1 est de puissance $\aleph_1$. On a donc $\aleph_1 \geqslant 2^{\aleph_0}$, d'où $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. L'implication $\boldsymbol{P}_{9a} \rightarrow \boldsymbol{H}$, et par conséquent l'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_{9a}$ et $\boldsymbol{H}$, est ainsi établie.

Il est à remarquer que la proposition $(\boldsymbol{S}_1)$ suivante peut être démontrée sans faire appel à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$:

$(\boldsymbol{S}_1)$ *Il existe un ensemble linéaire indénombrable N qui a un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points communs avec tout ensemble de mesure nulle.*

La démonstration de la proposition $(\boldsymbol{S}_1)$ est tout à fait analogue à celle de la proposition $(\boldsymbol{L}_1)$, donnée plus haut.

Proposition $\boldsymbol{P}_{10}$ [1]. *Il existe dans l'espace de Hilbert un ensemble indénombrable de points, dont aucun sous-ensemble indénombrable n'est homéomorphe à une partie d'un espace euclidien.*

1° $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_{10}$. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Il en résulte, comme nous savons, la proposition $\boldsymbol{P}_8$.

Soient $\mathcal{H}$ l'ensemble de tous les points de l'espace de Hilbert et Φ la famille de tous les ensembles G_δ de dimension 0 (c. à d. homéomorphes à des sous-ensembles de l'ensemble $\mathcal{N}$ de tous les nombres irrationnels) situés dans $\mathcal{H}$. On sait que l'espace $\mathcal{H}$ et la famille Φ satisfont aux conditions de la proposition $\boldsymbol{P}_8$ [2]. D'après cette proposition il existe donc un ensemble non dénombrable $N \subset \mathcal{H}$ qui a avec chaque ensemble de la famille Φ un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.

Soit maintenant Q un sous-ensemble quelconque de N, homéomorphe à une partie de l'espace euclidien $\mathcal{E}_m$ à m dimensions.

---

[1] W. Hurewicz, *Fund. Math.* XIX, p. 8. Cf. aussi *Proc. Acad. Amsterdam* 31 (1928), p. 920, renvoi [7].

[2] Pour plus de détails voir la Note précitée de M. Hurewicz.

Or, on sait que $\mathcal{E}_m$ est une somme de $m+1$ ensembles homéomorphes à des ensembles de nombres irrationnels et que chaque ensemble de tels nombres est contenu dans un G_δ de dimension 0, donc dans un ensemble de la famille Φ. Comme $Q \subset N$, il en résulte tout de suite en vertu de la définition de l'ensemble N que Q est une somme d'un nombre fini d'ensembles au plus dénombrables et par conséquent qu'il est lui-même au plus dénombrable. On a donc $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_{10}$.

2⁰ $\boldsymbol{P}_{10} \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_{10}$. On sait que tout ensemble de puissance inférieure à celle du continu et situé dans un espace métrique est homéomorphe à un ensemble de nombres irrationnels et par suite de dimension 0. En supposant donc que $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$, il en résulte que tout ensemble de puissance $\aleph_1$ situé dans l'espace $\mathcal{H}$ de Hilbert est de dimension 0. Or, tout ensemble indénombrable contient un sous-ensemble de puissance $\aleph_1$. Par conséquent tout ensemble indénombrable situé dans l'espace $\mathcal{H}$ contiendrait un sous-ensemble indénombrable homéomorphe à un ensemble linéaire, contrairement à la proposition $\boldsymbol{P}_{10}$.

On a donc $\boldsymbol{P}_{10} \rightarrow \boldsymbol{H}$; l'équivalence des propositions $\boldsymbol{P}_{10}$ et $\boldsymbol{H}$ est ainsi établie.

Proposition $\boldsymbol{P}_{11}$. *Aucun ensemble de puissance $\aleph_1$ n'est une somme de plus que $\aleph_1$ ensembles infinis ayant deux à deux un nombre fini d'éléments communs* [1]).

1⁰ $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_{11}$. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Soient E un ensemble de puissance $\aleph_1$ et F une famille de puissance $> \aleph_1$ de sous--ensembles infinis de E.

Faisons correspondre à chaque ensemble N de la famille F un ensemble dénombrable $D(N)$ contenu dans lui. Or, E ne contenant (en vertu de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$) que $\aleph_1^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1$ sous-ensembles dénombrables et la puissance de la famille F (des ensembles N) dépassant $\aleph_1$, l'inégalité $D(N') \neq D(N'')$ ne peut se présenter pour

---

[1]) Voir A. Tarski, *Fund. Math.* XII, p. 201.

tout couple $N' \neq N''$ d'ensembles de la famille F. Il existe donc deux ensembles distincts N' et N'' de F tels que $D(N') = D(N'')$ et qui ont par conséquent une infinité d'éléments communs (à savoir l'ensemble $D(N')$). Il est ainsi démontré qu'il n'existe aucune famille F de sous-ensembles infinis de E ayant deux à deux tout au plus un nombre fini d'éléments communs. L'ensemble E ne peut donc être une somme des ensembles d'une telle famille. Par celà-même il est établi que $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{P}_{11}$.

2° $\boldsymbol{P}_{11} \rightarrow \boldsymbol{H}$. Admettons la proposition $\boldsymbol{P}_{11}$ et soit E l'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \Omega$. C'est donc un ensemble de puissance $\aleph_1$. Faisons correspondre à toute suite infinie de nombres naturels croissants $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ l'ensemble $D(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ de tous les nombres naturels

$$2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_k} \qquad \text{où } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Or, si $m_1, m_2, m_3 \ldots$ et $n_1, n_2, n_3, \ldots$ sont deux suites infinies croissantes de nombres naturels, différentes l'une de l'autre, les ensembles $D(m_1, m_2, \ldots)$ et $D(n_1, n_2, \ldots)$ ont tout au plus un nombre fini d'éléments communs: en effet, si $m_p \neq n_p$, on a évidemment pour $k \geqslant p$ et $l \geqslant p$:

$$2^{m_1} + 2^{m_2} + \ldots + 2^{m_p} + \ldots + 2^{m_k} \neq 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_p} + \ldots + 2^{n_l},$$

puisque chaque nombre naturel admet une seule représentation dans le système de numération à base 2, et par conséquent les ensembles $D(m_1, m_2, \ldots)$ et $D(n_1, n_2, \ldots)$ ont moins que p éléments communs.

Soit Φ la famille de tous les ensembles $D(n_1, n_2, \ldots)$ correspondant aux suites infinies croissantes $n_1, n_2, n_3 \ldots$ de nombres naturels: c'est donc une famille de puissance $2^{\aleph_0}$. Soit S la somme de tous les ensembles de la famille Φ: c'est évidemment un sous-ensemble de E. Comme $E = S + (E - S)$, on en conclut tout de suite que E est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles infinis ayant deux à deux tout au plus un nombre fini d'éléments communs. L'en-

semble E étant de puissance $\aleph_1$, E n'est pas, d'après la proposition P_{11}, une somme de plus que $\aleph_1$ ensembles de ce genre. Il en résulte que le nombre $2^{\aleph_0}$ ne peut dépasser $\aleph_1$, c. à d. que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Nous avons ainsi prouvé que $P_{11} \rightarrow H$. Il est donc établi que les propositions H et P_{11} sont équivalentes.

CHAPITRE II.

L'ensemble de M. Lusin.

§ 1. Proposition C_1.

Parmi les diverses conséquences de l'hypothèse H il y a une — nous la désignerons par C_1 — qui est d'une importance capitale, puisque plusieurs autres conséquences de l'hypothèse H peuvent être démontrées, en admettant au lieu de cette hypothèse la proposition C_1 seule. Elle est due à M. N. Lusin.

Nous consacrons donc ce chapitre à la proposition C_1 et à ses conséquences. Nous y établirons aussi, sans admettre l'hypothèse H, plusieurs théorèmes, dont nous déduirons ensuite moyennant la proposition C_1 d'autres conséquences intéressantes. Nous envisagerons enfin certaines conséquences de l'hypothèse H qui sont dans un rapport particulièrement étroit avec la proposition C_1.

Proposition C_1. *Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble (linéaire) parfait non-dense.*

C'est précisément une partie de la proposition P_9: cette dernière étant équivalente à l'hypothèse H, on a donc $H \to C_1$.

M. Lusin a démontré la proposition C_1 à l'aide de l'hypothèse H pour en déduire l'existence des fonctions qui satisfont à la condition de Baire, sans être représentables analytiquement [1])

---

[1]) *C. R. Paris* 158, p. 1259 (Note du 4 mai 1914).

(ce n'est que plus tard qu'il a établi l'existence de telles fonctions sans l'hypothèse H, à savoir par les moyens de la théorie des ensembles analytiques [1]); nous y reviendrons plus loin, p. 69 et 70).

Il est à remarquer que l'existence d'un ensemble linéaire indénombrable N ayant avec tout ensemble parfait non-dense un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points communs peut être établie sans utiliser l'hypothèse H. En effet, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'existence d'un tel ensemble N résulte immédiatement de la proposition C_1 et si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, il suffit de prendre pour N un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$.

§ 2. Propriétés L et C.

Nous appellerons *ensemble de Lusin* tout ensemble N qui satisfait à la proposition C_1. L'ensemble de M. Lusin joue un rôle considérable dans la Théorie des ensembles de points, où ses propriétés remarquables permettent de démontrer plusieurs propositions importantes.

Nous dirons pour abréger qu'un ensemble linéaire E jouit de la *propriété* **L**, si tout ensemble parfait non-dense contient un ensemble au plus dénombrable de points de l'ensemble E. La proposition C_1 affirme donc qu'il existe parmi les ensembles linéaires de puissance du continu un ensemble N jouissant de la propriété **L**.

On dit qu'un ensemble linéaire jouit de la *propriété* **C**, si pour chaque suite infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de nombres réels positifs donnés d'avance, il peut être couvert par une suite infinie d'intervalles $I_1, I_2, I_3, \ldots$ tels que, δ_n désignant la longueur de I_n, on ait $\delta_n = a_n$ pour $n = 1, 2, \ldots$ [2]).

---

[1]) Voir N. Lusin, *Fund. Math.* II, p. 157, ainsi que N. Lusin et W. Sierpiński, *Journ. de Math.* II (1923), p. 72.

[2]) Les ensembles jouissant de la propriété **C** coïncident avec ceux que M. E. Borel appelle „ensembles qui ont une mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance" (Bull. Soc. Math. de France XLVII, 1919, p. 1).

On voit aussitôt que la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles jouissant de la propriété **C** est aussi un ensemble jouissant de cette propriété. M. E. Szpilrajn a démontré [1]) qu'un ensemble jouissant de la propriété **C** ne peut contenir aucun sous-ensemble parfait, de sorte que s'il est mesurable (B) ou, plus généralement, s'il est un ensemble analytique, il est nécessairement au plus dénombrable.

En outre [2]) *la propriété* **C** *est un invariant des transformations effectuées moyennant les fonctions continues d'une variable réelle.*

§ 3. Fonctions définies sur les ensembles à propriété L.

Dans la suite nous appellerons:

fonction de Baire — toute fonction représentable analytiquement (c. à d. qui s'obtient des fonctions continues par un nombre fini ou par une infinité dénombrable de passages à la limite),

fonction satisfaisant à la condition de Baire — toute fonction qui est continue sur chaque ensemble parfait, quand on néglige les ensembles de première catégorie de Baire par rapport à cet ensemble parfait [3]),

ensemble jouissant de la propriété de Baire — tout ensemble E (situé dans un espace métrique) tel que pour tout ensemble parfait P il existe une sphère S contenant à son intérieur des points de P et telle qu'au moins un des ensembles SPE et $SP - E$ est de première catégorie de Baire par rapport à P [4]).

On montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f(x)$ satisfasse à la condition de Baire est que pour tout F fermé l'ensemble $\underset{x}{E}\,[f(x) \in F]$ jouisse de la propriété

[1]) *Fund. Math.* XV, p. 126.

[2]) Ibidem, p. 127.

[3]) M. Kuratowski (*Topologie I*, Monografje Matematyczne, 1933, p. 194) l'appelle *fonction à propriété de Baire au sens restreint* (cf. ibid., p. 191).

[4]) M. Kuratowski (*Topologie I*, p. 55) l'appelle *ensemble jouissant de la propriété de Baire au sens restreint* (cf. ibid., p. 49).

de Baire [1]). La propriété de Baire d'un ensemble quelconque et la propriété de sa *fonction caractéristique* (c. à d. égale à 1 dans lui et à 0 partout ailleurs) de satisfaire à la condition de Baire sont équivalentes.

Théorème 1. *Chaque fonction de Baire d'une variable réelle transforme tout ensemble jouissant de la propriété* **L** *en ensemble jouissant de la propriété* **C** [2]).

Démonstration. Soit $f(x)$ une fonction de Baire d'une variable réelle. Il existe alors, comme on sait, un ensemble K de première catégorie, tel que la fonction $f(x)$ est continue sur l'ensemble $\mathcal{E} - K$ [3]).

Pour tout E, on a identiquement $f(E) = f(KE) + f(E - K)$.

Or, soit E un ensemble linéaire (infini) jouissant de la propriété **L**. L'ensemble K étant de première catégorie (donc contenu dans une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non-denses), l'ensemble KE, et à plus forte raison l'ensemble $f(KE)$, est au plus dénombrable et jouit par suite de la propriété **C**. Une somme de deux ensembles jouissant de la propriété **C** étant aussi un ensemble qui jouit de la propriété **C**, il s'agit de montrer encore que l'ensemble $f(E - K)$ jouit de cette propriété.

Nous pouvons évidemment supposer que l'ensemble $E - K$ est infini. Soit $Q = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ un sous-ensemble de $E - K$, dénombrable et dense dans $E - K$. Considérons une suite infinie quelconque de nombres réels positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et soit k un nombre naturel donné.

La fonction $f(x)$ étant continue dans l'ensemble $\mathcal{E} - K$, donc à plus forte raison dans l'ensemble $E - K$, il existe un nombre positifs δ_k tel que les formules

---

[1]) Ibid., p. 194—195.

[2]) C'est une généralisation d'un théorème que j'ai démontré dans *Fund. Math.* XI, p. 302—304; cf. *Mathematica* vol. I, p. 115.

[3]) Voir p. ex. *Fund. Math.* I, p. 163.

(1) $|x - x_k| < \delta_k$ *et* $x \in E - K$

entraînent l'inégalité

(2) $$|f(x) - f(x_k)| < \frac{a_{2k}}{2}.$$

Désignons par R l'ensemble de tous les nombres x de $E - K$ qui satisfont aux inégalités

(3) $|x - x_k| \geqslant \delta_k$ *pour* $k = 1, 2, 3, \ldots$

L'ensemble Q étant dense dans $E - K$, on voit sans peine que l'ensemble R est non-dense; comme contenu dans l'ensemble E, qui jouit de la propriété **C**, l'ensemble R est donc au plus dénombrable. Posons $R = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ et désignons pour $k = 1, 2, 3, \ldots$: par I_{2k-1} l'intervalle $\left[f(y_k) - \frac{a_{2k-1}}{2}, f(y_k) + \frac{a_{2k-1}}{2}\right]$ et par I_{2k} l'intervalle $\left[f(x_k) - \frac{a_{2k}}{2}, f(x_k) + \frac{a_{2k}}{2}\right]$. La longueur δ_n de l'intervalle I_k est donc égale à a_n pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et on voit sans peine que l'ensemble $f(R)$ est recouvert par les intervalles $I_1, I_3, I_5, \ldots$ Or, l'ensemble $f(E - K) - f(R)$ est en même temps couvert par les intervalles $I_2, I_4, I_6, \ldots$

En effet, soit q un élément de $f(E - K) - f(R)$. On a donc

(4) $q \in f(E - K)$ et (5) q *non*-$\in f(R)$.

En vertu de (4), il existe un nombre x de $E - K$ tel que $q = f(x)$ et, en vertu de (5), il vient x *non*-$\in R$. D'après la définition de l'ensemble R, les inégalités (3) ne peuvent donc être satisfaites toutes à la fois. Il existe par conséquent un nombre naturel k pour lequel $|x - x_k| < \delta_k$ et, l'inégalité (1) entraînant l'inégalité (2), la définition de l'intervalle I_{2k} montre que le point $q = f(x)$ appartient à cet intervalle.

Tout point q de l'ensemble $f(E - K) - f(R)$ est donc contenu dans un (au moins) des intervalles $I_2, I_4, I_6, \ldots$ et par conséquent l'ensemble $f(E - K) = f(R) + [f(E - K) - f(R)]$ se trouve

entièrement couvert par les intervalles $I_1, I_2, I_3, \ldots$ Il jouit donc de la propriété **C**, c. q. f. d.

Théorème 2. *Aucun ensemble linéaire indénombrable jouissant de la propriété* **L** *ne jouit de la propriété de Baire relativement à la droite* [1]).

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire indénombrable jouissant de la propriété **L**: un tel ensemble est nécessairement de deuxième catégorie de Baire, puisque chaque ensemble jouissant de la propriété **L** admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble parfait non-dense, donc aussi avec tout ensemble de première catégorie. Or, chaque ensemble linéaire de deuxième catégorie est *partout* de deuxième catégorie, c. à d. de deuxième catégorie *dans tout intervalle partiel* (en cas de l'espace métrique général *dans toute sphère partielle*) d'un certain intervalle: soit I un tel intervalle pour l'ensemble E. Si l'ensemble $I - E$ était de première catégorie, il existerait, comme on voit sans peine, un ensemble parfait P contenu dans l'ensemble $I - (I - E) = E$, car le complément à un intervalle d'un ensemble de première catégorie contient toujours un sous-ensemble parfait. Cependant l'existence de l'ensemble P est impossible, l'ensemble E jouissant de la propriété **L**. L'ensemble $I - E$ est donc de deuxième catégorie et par suite il existe un intervalle $J \subset I$ tel que $I - E$ est partout de deuxième catégorie dans J. Les ensembles E et $J - E = J(I - E)$ sont donc partout de deuxième catégorie dans intervalle J, c. à d. que l'ensemble E ne jouit pas de la propriété de Baire relativement à la droite, c. q. f. d.

La propriété **L** étant évidemment *héréditaire* [2]), le th. 2 entraîne les deux corollaires suivants:

---

[1]) On dit qu'un ensemble linéaire E ne jouit pas de la propriété de Baire *relativement à la droite*, s'il existe un *intervalle* de cette droite dans lequel l'ensemble E, en même temps que son complémentaire, sont partout de deuxième catégorie.

[2]) cf. plus haut, p. 28, renvoi [2]).

Corollaire 1. *Si un ensemble linéaire E jouit de la propriété* **L**, *aucun sous-ensemble indénombrable de E ne jouit de la propriété de Baire relativement à la droite.*

Corollaire 2. *Tout sous-ensemble indénombrable d'un ensemble (linéaire) jouissant de la propriété* **L** *est de deuxième catégorie de Baire.*

Il est aisé de voir que *la condition du corollaire 2 est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour qu'un ensemble E jouisse de la propriété* **L**.

En effet, si tout sous-ensemble non dénombrable d'un ensemble linéaire E est de deuxième catégorie, aucun ensemble parfait non-dense ne peut contenir un sous-ensemble indénombrable de E, car ce serait alors un sous-ensemble indénombrable de E de première catégorie.

Théorème 3. *Si E est un ensemble linéaire jouissant de la propriété* **L**, *toute fonction de Baire définie sur E est de classe $\leqq 2$ (sur E)* [1].

Démonstration. Soient E un ensemble linéaire jouissant de la propriété **L** et $f(x)$ une fonction de Baire définie sur E. Une fonction de Baire définie sur un ensemble linéaire quelconque peut, comme on sait, être toujours prolongée à une fonction de Baire d'une variable réelle [2]: il existe donc une fonction de Baire $\varphi(x)$ définie sur l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels et qui coïncide avec $f(x)$ sur E.

Comme toute fonction de Baire d'une variable réelle satisfait à la condition de Baire, il existe un ensemble K de première catégorie tel que la fonction $\varphi(x)$ est continue sur l'ensemble $\mathcal{E} - K$. La fonction $f(x)$, comme égale à $\varphi(x)$ dans E, est donc continue sur l'ensemble $E(\mathcal{E} - K) = E - EK$. Or, l'ensemble E jouissant de la propriété **L** et l'ensemble K étant de première catégorie,

---

[1]) Cf. *Fund. Math.* XV, p. 212 et p. 285.

[2]) Voir p. ex. *Fund. Math.* XVI, p. 81.

l'ensemble EK est au plus dénombrable. La fonction $f(x)$ est donc continue sur E, lorsqu'on néglige un ensemble au plus dénombrable. Une telle fonction est, comme on sait, de classe $\leqslant 2$ sur E.

Théorème 4. *Si un ensemble linéaire non dénombrable E jouit de la propriété* **L**, *il existe une fonction réelle définie sur E et qui est de classe* 2 *sur E* [1]).

Démonstration. Soit D un sous-ensemble de E dénombrable et dense dans E. Posons

$$f(x) = 0 \qquad \textit{pour } x \in D$$

et

$$f(x) = 1 \qquad \textit{pour } x \in E - D.$$

Il suffit de montrer que E jouissant de la propriété **L**, la fonction $f(x)$, ainsi définie sur E, est de classe 2 sur E. La fonction $f(x)$ étant sûrement de classe $\leqslant 2$ sur E (en tant que continue, lorsqu'on néglige l'ensemble dénombrable D), cela revient à prouver que $f(x)$ n'est pas de classe $\leqslant 1$ sur E.

D'après le théorème 2, l'ensemble E est de deuxième catégorie et il existe un intervalle I dans lequel E est partout de deuxième catégorie. L'ensemble D étant dense dans E, la définition de la fonction $f(x)$ montre aussitôt que $f(x)$ est une fonction discontinue sur E en tout point de EI. Or, M. C. Kuratowski a démontré [2]) que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de classe $\leqslant 1$, définie sur un ensemble linéaire, est toujours de première catégorie sur cet ensemble. En conséquence, si la fonction $f(x)$ était de classe $\leqslant 1$ sur E, donc aussi sur EI, l'ensemble EI serait de première catégorie sur lui-même et par suite sur la droite $\mathcal{E}$ (EI étant dense dans I). Cependant on se trouverait alors en contradiction avec le th. 2, p. 41, car EI est un sous-ensemble indénombrable de l'ensemble E, qui jouit par hypothèse de la propriété **L**.

---

[1]) Cf. G. Poprougénko, *Fund. Math.* XV, p. 285.

[2]) *Fund. Math.* V, p. 80, théorème 1.

Théorème 5. *Soit $m(E)$ une fonction définie pour tous les sous-ensembles E d'un ensemble linéaire Q de façon que les conditions suivantes soient remplies:*

(i) *$m(E)$ est un nombre (fini) réel non négatif, quel que soit $E \subset Q$,*

(ii) *$m\left(\sum_n E_n\right) = \sum_n m(E_n)$, quelle que soit la suite (finie ou infinie) $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ de sous-ensembles disjoints de Q,*

(iii) *$m(E) = 0$, lorsque E est un ensemble formé d'un seul élément de Q.*

Dans ces conditions, si l'ensemble Q jouit de la propriété **L**, *la fonction $m(E)$ s'annule identiquement pour tout $E \subset Q$* [1]).

Démonstration. Etant donné un $\varepsilon > 0$ réel quelconque et un élément x_0 de Q, désignons par E_n l'ensemble de tous les points $x \in Q$ tels que $\frac{1}{n+1} \leqslant |x - x_0| < \frac{1}{n}$ et posons $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots$ Les ensembles E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont évidemment des sous-ensembles disjoints de Q: d'après (i) on a donc l'égalité $m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \ldots$ Le nombre $m(E)$ étant fini, la série $m(E_1) + m(E_2) + \ldots$ est convergente et il existe un indice n tel que $m(E_n) + m(E_{n+1}) + \ldots < \varepsilon$. Posons $M = (x_0) + E_n + E_{n+1} + \ldots$ Il vient d'après (ii) et (iii) $m(M) = m(E_n) + m(E_{n+1}) + \ldots < \varepsilon$. Or, M est évidemment la partie de l'ensemble Q contenue dans l'intervalle $\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$.

Nous avons ainsi démontré que pour tout $x_0 \in Q$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un intervalle I entourant x_0, tel que $m(QI) < \varepsilon$.

---

[1]) Ce th. est un cas particulier du théorème plus général, démontré pour les ensembles Q jouissant de la propriété **C** (voir E. Szpilrajn, *Fund. Math.*, XXII (1934), à paraître). L'énoncé du texte exprime le fait que l'ainsi dit problème de la mesure *généralisé* (cf. p. ex. S. Banach et C. Kuratowski, *Fund, Math.* XIV, p. 127) comporte sur les ensembles Q à propriété **L** une solution toujours négative. Nous y reviendrons plus loin (voir § 7, p. 60).

Soit maintenant $x_1, x_2, x_3, \ldots$ une suite infinie de points de Q dense dans Q. Pour tout indice n il existe donc un intervalle I_n entourant x_n et tel que $m(QI_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Posons $R = Q - (I_1 + I_2 + \ldots)$. C'est évidemment un sous-ensemble non-dense de Q.

Or, admettons que Q jouisse de la propriété **L**. Comme ensemble non-dense situé dans Q, l'ensemble R est alors au plus dénombrable. En vertu de (ii) et (iii) il vient donc $m(R) = 0$, d'où selon (i) et (ii):

$$m(Q) = m\left(R + Q\sum_{n=1}^{\infty} I_n\right) = m\left(Q\sum_{n=1}^{\infty} I_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m\left(Q\,I_n\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots = \varepsilon,$$

de sorte que $m(Q) < \varepsilon$. Le nombre positif ε étant arbitraire, il en résulte d'après (i) que l'on a $m(Q) = 0$, donc d'après (i) et (iii) que $m(E) = 0$ pour tout sous-ensemble E de Q, c. q. f. d.

Théorème 6 [1]. *Si un ensemble linéaire indénombrable Q jouit de la propriété* **L**, *il existe une fonction $f(x)$ continue sur Q qui n'est par uniformément continue sur aucun sous-ensemble indénombrable de Q.*

Démonstration. Soit Q un ensemble de nombres irrationnels de l'intervalle $\mathcal{J} = [0,1]$ jouissant de la propriété **L**. Considérons une fonction $f(x)$ continue sur l'ensemble $\mathcal{N}\mathcal{J}$ de tous les nombres irrationnels de l'intervalle [0,1], mais qui n'est uniformément continue sur aucune *portion* de $\mathcal{N}$, c. à d. sur aucun ensemble $\mathcal{N}I$ où I est un intervalle partiel arbitraire de $\mathcal{J}$.

Il est facile de trouver des exemples pour les fonctions $f(x)$ de ce genre. Telle est p. ex. toute fonction croissante dont l'ensemble des points de discontinuité est l'ensemble $\mathcal{R}$ de tous les nombres rationnels. On peut poser en particulier $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}nx}{n^3}$, où $\mathrm{E}t$ désigne le plus grand entier ne dépassant pas t.

La fonction $f(x)$ est évidemment continue sur l'ensemble Q.

---

[1]) Voir ma Note dans le *Bull. Acad. Roumaine* XVII (1934), N° 1.

Reste à montrer qu'elle n'est uniformément continue sur aucun sous-ensemble indénombrable E de Q.

Supposons par contre que la fonction $f(x)$ soit uniformément continue sur un tel ensemble E. L'ensemble Q jouissant de la propriété **L**, l'ensemble E ne peut être non-dense dans Q. Il existe donc un intervalle $I \subset Q$ tel que E est dense dans I. La fonction $f(x)$ étant par hypothèse uniformément continue sur E et continue sur l'ensemble $\mathfrak{N}I$, contenu dans la fermeture de E, elle serait, selon un théorème connu, uniformément continue sur $\mathfrak{N}I$, contrairement à l'hypothèse, selon laquelle la fonction $f(x)$ n'est uniformément continue sur aucune portion de $\mathfrak{N}$.

D'après une remarque que je dois à M. S. Saks, un raisonnement analogue permet d'établir le théorème suivant:

Théorème 7. *Si un ensemble linéaire indénombrable Q jouit de la propriété* **L**, *il existe une suite infinie $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ de fonctions continues d'une variable réelle qui converge non uniformément vers 0 sur tout sous-ensemble indénombrable de Q.*

Démonstration. Soient Q un ensemble linéaire jouissant de la propriété **L** et $D = (x_1, x_2, x_3, ...)$ un ensemble dénombrable partout dense contenu dans CQ (le complémentaire de Q).

Posons $f(x_n) = \frac{1}{n}$ pour $n = 1, 2, 3, ...$ et $f(x) = 0$ pour $x \in CD$.

On voit sans peine que la fonction $f(x)$ est continue en tout point de CD et discontinue en tout point de D et qu'il existe une suite infinie de fonctions continues d'une variable réelle $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ qui convergent vers $f(x)$ pour tout x réel. Reste à montrer que cette suite converge non uniformément sur tout sous-ensemble indénombrable de Q.

En effet, soit N un sous-ensemble indénombrable arbitraire de Q. L'ensemble Q jouissant de la propriété **L**, il existe, comme nous savons, un intervalle I tel que N est dense dans I. Supposons que la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ converge uniformément sur N. Elle converge donc uniformément sur un ensemble dense dans l'intervalle I: les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ étant continues, il en

résulte sans peine que la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ converge uniformément sur l'intervalle I tout entier, donc que sa limite est une fonction continue sur I. Or, ce n'est pas le cas, car la fonction $f(x)$ est par hypothèse discontinue en tout point de l'ensemble dense D.

Théorème 8 [1]. *Si un ensemble linéaire Q jouit de la propriété* **L**, *il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ continues, uniformément bornées et telles que pour chaque suite infinie croissante d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$, la suite $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), f_{m_3}(x) \ldots$ est convergente tout au plus en une infinité dénombrable de points x de Q.*

Démonstration. Comme on voit sans peine, on peut définir (par induction) une suite infinie de fonctions continues d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), \ldots$ telle que l'on ait $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ pour tout n naturel et pour tout x réel, et qui remplisse en outre la condition suivante:

(6) *quel que soit $n = 1, 2, \ldots$, il existe pour tout intervalle I de longueur $< \frac{1}{n}$ et pour tout indice $k < n$ un nombre réel $x \in I$ tel que $|f_n(x) - f_k(x)| \geqslant \frac{1}{2}$.*

Or, nous allons montrer que chaque suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ de ce genre (qui est uniformément bornée par définition) satisfait à la thèse du théorème.

Soit, en effet, $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ une suite infinie croissante d'indices et supposons que N soit un sous ensemble indénombrable de Q en tout point x duquel la suite infinie $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), f_{m_3}(x), \ldots$ est convergente. Admettons enfin que l'ensemble Q jouisse de la propriété **L**. L'ensemble N, en tant qu'indénombrable et jouissant de la propriété **L** (comme sous-ensemble de Q), est dense dans un certain intervalle I. Soit D un sous-ensemble dénombrable de N dense dans I. La suite $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), \ldots$ converge donc dans D et, d'après un théorème général connu, on peut en extraire une

[1]) Ce théorème et sa démonstration sont dus à M. S. Saks.

suite $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), f_{n_3}(x), \ldots$ qui converge uniformément dans D, donc aussi dans I (puisque D est dense dans I). Or, c'est, comme voit sans peine, incompatible avec la condition (6).

§ 4. Propriété M.

Nous dirons qu'un ensemble linéaire E jouit de la *propriété* **M** de M. K. Menger [1]), si toute famille F d'ensembles ouverts tels que chaque point de E se trouve situé dans un ensemble appartenant à la famille F de diamètre aussi petit qu'on le veut contient une suite infinie d'ensembles ouverts dont la somme contient E et dont les diamètres tendent vers zéro („Nullfolge").

Théorème 9. *Tout ensemble linéaire jouissant de la propriété* **L** *jouit aussi de la propriété* **M.**

Démonstration. Soit F une famille d'ensembles ouverts tels que pour tout point p de E et pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble appartenant à F, contenant p et dont le diamètre est inférieur à ε. Soit $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ un sous-ensemble de E, dénombrable et dense dans E. D'après la propriété de la famille F, il existe pour tout n naturel un ensemble P_n de F de diamètre $\delta(P_n) < \frac{1}{n}$ et tel que $p_n \in P_n$. On aperçoit aisément que l'ensemble $Q = E - (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots)$ est alors non-dense.

Or, admettons que l'ensemble E jouisse de la propriété **L.** Comme sous-ensemble non dense-de E l'ensemble Q est donc au plus dénombrable. Soit q_1, q_2, q_3 une suite formée de tous les éléments de Q (on peut la supposer toujours infinie, en répétant, s'il y a lieu, le même point *ad inf.*). D'après la propriété de la famille F, il existe pour tout indice n un ensemble Q_n de F tel que $q_n \in Q_n$ et $\delta(Q_n) < {}^1/_n$.

Considérons la suite $P_1, Q_1, P_2, Q_3, P_3, \ldots$ Les diamètres des ensembles de cette suite convergent vers 0 et l'ensemble-somme

---

[1]) Voir K. Menger, *Sitzungsber. Akad. Wien* 133 (1924), p. 421.

$S = P_1 + Q_1 + P_2 + Q_2 + \dots$ contient évidemment l'ensemble E. Donc, l'ensemble E jouit de la propriété de M. Menger, c. q. f. d.

§ 5. Conséquences $C_2 - C_9$ de la proposition C_1.

La proposition C_1 et le théorème 2 entraînent la

Proposition C_2. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu qui est transformé par toute fonction de Baire d'une variable réelle en un ensemble jouissant de la propriété* **C**.

Tout ensemble jouissant de la propriété **C** est évidemment de mesure nulle. La proposition C_2 implique par conséquent la

Proposition C_3. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu dont toute image continue est de mesure nulle.*

En effet, pour montrer que $C_2 \rightarrow C_3$, il suffit de rappeler que pour toute fonction continue $f(x)$, définie sur un ensemble quelconque E de nombres réels, il existe, comme on sait, une fonction de Baire de première classe définie sur l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels et qui coïncide avec $f(x)$ sur E.

Or, il est à remarquer que nous ne savons pas établir sans faire l'usage de l'hypothèse H non seulement la proposition C_3, mais non plus la proposition affirmant l'existence d'un ensemble linéaire indénombrable qui se transforme en ensemble de mesure nulle par toute fonction continue d'une variable réelle.

D'une façon analogue, nous ne savons démontrer qu'à l'aide de l'hypothèse H cette

Proposition C_{3a}. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu, dont toutes les images homéomorphes sont de mesure nulle.*

Or, nous savons démontrer sans l'hypothèse H qu'*il existe un ensemble linéaire indénombrable dont toute image homéomorphe est de mesure nulle* [1]).

---

1) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* VII, p. 188 et *Publications de l'Univ. de Belgrade* 1934.

Notons toutefois que sans employer l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ on sait démontrer le théorème que voici:

Φ étant une famille de puissance $\aleph_1$ de fonctions de Baire d'une variable réelle (ou, plus généralement, de fonctions qui sont continues, en négligeant un ensemble de première catégorie), il existe un ensemble linéaire indénombrable qui se transforme par toute fonction de la famille Φ en ensemble de mesure nulle [1]).

P. Urysohn appelait *parfaitement mesurable* un ensemble (linéaire) E, si tout ensemble homéomorphe à E est mesurable, et il a posé le problème: quelle est la puissance de la famille de tous les ensembles linéaires parfaitement mesurables? [2]).

Proposition C_4. *La famille de tous les ensembles linéaires parfaitement mesurables est de la puissance* $2^{2^{\aleph_0}}$ [3]).

Démonstration. Nous prouverons que $C_1 \to C_4$. D'après C_1 il existe un ensemble linéaire de puissance du continu qui jouit de la propriété $\mathbf{L}$. Cette propriété étant *héréditaire* [4]), la famille de tous les ensembles jouissant de la propriété $\mathbf{L}$ est évidemment de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

En vertu du théorème 1, la puissance de la famille de tous les ensembles dont toutes les images continues jouissent de la propriété $\mathbf{C}$ est aussi de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$. La proposition C_4 en résulte tout de suite.

Il est à remarquer que l'existence de $2^{\aleph_0}$ ensembles indénombrables parfaitement mesurables linéaires peut être établie sans faire appel à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$: tels sont p. ex. tous les ensembles indénombrables mesurables (B) et, plus généralement, analytiques.

Voici encore une conséquence immédiate de la proposition C_1 et du théorème 1:

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XXII, p. 42.

[2]) *Fund. Math.* IV, p. 368 (Problème 22).

[3]) M. Lavrentieff, *Fund. Math.* VI, p. 156.

[4]) cf. la définition p. 28, renvoi [2]).

Proposition C_5. *Il existe un ensemble linéaire E de puissance du continu et tel que l'intervalle linéaire n'en est pas une image continue* [1]).

D'après le théorème 1, il suffit évidemment de prendre pour E un ensemble quelconque de puissance du continu qui jouisse de la propriété **L**.

Or, si simple que peut paraître la proposition C_5, nous ne savons pas la démontrer sans admettre l'hypothèse H. Cependant nous savons démontrer sans admettre l'hypothèse H qu'*il existe un ensemble linéaire non dénombrable dont toutes les images continues sont distinctes de l'intervalle.*

En effet, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, cela résulte tout de suite de la proposition C_5, et si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, il suffit de prendre un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$.

Il est à remarquer que sans faire appel à l'hypothèse H, on sait établir l'existence de deux ensembles linéaires de puissance du continu dont aucun n'est une image continue de l'autre; M. A. Lindenbaum a même démontré (sans admettre l'hypothèse H) qu'il existe une famille formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires de puissance du continu, telle qu'aucun d'eux n'est une image continue d'aucun autre [2]).

La proposition C_1 entraîne en vertu du corollaire 1 la

Proposition C_6. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu dont aucun sous-ensemble indénombrable ne jouit de la propriété de Baire relativement à l'intervalle (donc, dont tout sous--ensemble indénombrable est de deuxième catégorie).*

---

[1]) *Fund. Math.* XIX, p. 208.

[2]) L'énoncé de cette proposition est publiée dans les *Ann. de le Soc. Polonaise de Math.* X (Séance de la Section de Varsovie du 16.I.1931). En admettant que $2^{2^{\aleph_0}} = \aleph_2$, je l'ai démontré dans *Fund. Math.* XIX, p. 209. Notons à ce propos qu'on peut donner sur le plan une construction effective de $2^{\aleph_0}$ continus dont aucun n'est une image continue d'aucun autre (cf. Z. Waraszkiewicz, *Fund. Math.* XVIII, p. 118, et N. Aronszajn, *Fund. Math.* XIX, p. 134—136).

On déduit de C_1 en vertu des théorèmes 3 et 4 la suivante

Proposition C_7 [1]. *Il y a des ensembles de nombres réels sur lesquels il existe des fonctions de Baire des classes* 0, 1 *et* 2, *mais sur lequel il n'existe aucune fonction de Baire de classe* 3.

Or, on ne sait pas s'il y a un ensemble de nombres réels sur lequel il existe une fonction de classe 3, mais sur lequel il n'existe aucune fonction de classe 4 [2].

La proposition C_1 entraîne en vertu du théorème 5 la solution négative du problème généralisé de la mesure (non négative) pour les ensembles de puissance du continu; plus loin nous déduirons de C_1 cette solution par une autre voie [3].

Le théorème 6 et la proposition C_1 donnent tout de suite cette

Proposition C_8. *Il existe une fonction $f(x)$ continue sur un ensemble linéaire Q de puissance du continu, mais qui n'est uniformément continue sur aucun sous-ensemble indénombrable de Q* [4].

La proposition C_1 et le théorème 7 impliquent immédiatement la

Proposition C_9. *Il existe une suite infinie convergente de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ qui convergent non uniformément sur tout ensemble indénombrable* [5].

§ 6. Equivalences entre les conséquences C_9, C_{10}, C_{11} et C_{12}.

Nous prouverons maintenant (sans utiliser l'hypothèse H) que la proposition C_9 est équivalente à chacune des propositions C_{10}, C_{11} et C_{12} suivantes:

---

[1]) Voir G. Poprougénko, *Fund. Math.* XV, p. 284—286.

[2]) C'est un cas particulier (pour $\alpha = 4$) d'un problème posé par M. Mazurkiewicz sur les fonctions de classe α. Une solution pour $\alpha = 2$ sera donnée plus loin (voir Chap. III, § 2, proposition C_{38}, p. 91).

[3]) cf. p. 60, renvoi [2]). On peut sans peine se débarasser de la condition que la mesure soit non-négative.

[4]) Voir ma Note dans le *Bull. Acad. Roumaine* XVII (1934), Nr. 1.

[5]) Voir W. Sierpiński, *C. R. Soc. Sc. et Lettres Varsovie* 1928, p. 84—87.

Proposition C_{10}. *Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f^m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ et une suite double de fonctions d'une variable réelle $f_n^m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots; n = 1, 2, 3, \ldots)$, telles que*

(i) $$\lim_{n=\infty} f_n^m(x) = f^m(x) \quad \textit{pour} \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

(ii) $$\lim_{m=\infty} f^m(x) = 0,$$

et que, quelles que soient la suite infinie croissante de nombres naturels $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ et la suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$,

(iii) *l'égalité $\lim_{k=\infty} f_{n_k}^{m_k}(x) = 0$ ne se présente que tout au plus pour une infinité dénombrable de valeurs de x.*

Proposition C_{11} [1]. *Il existe une double suite d'ensembles B_k^i telle que*

(I)
$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= B_1^1 + B_2^1 + \ldots + B_k^1 + \ldots \\ \mathcal{E} &= B_1^2 + B_2^2 + \ldots + B_k^2 + \ldots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathcal{E} &= B_1^i + B_2^i + \ldots + B_k^i + \ldots \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

(II) *les ensembles d'une même ligne sont disjoints*

(III) *quelle que soit la suite d'entiers positifs $k_1, k_2, \ldots, k_i, \ldots$, le produit $\prod_{i=1}^{\infty} (B_1^i + B_2^i + \ldots + B_{k_i}^i)$ est au plus dénombrable.*

Proposition C_{12}. *Etant données deux suites infinies différentes de nombres naturels*

$$S = \{k_i\} \qquad \textit{et} \qquad T = \{n_i\},$$

convenons d'écrire $T \prec S$, lorsque $n_i \leqslant k_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$

---

[1]) La proposition C_{11} a été déduite de l'hypothèse H par M. M. Banach et Kuratowski, *Fund. Math.* XIV, p. 128.

Ceci posé, il existe une famille F de la puissance $2^{\aleph_0}$ ayant pour éléments certaines suites infinies de nombres naturels et satisfaisant à la condition: pour chaque suite infinie S de nombres naturels (qu'elle appartienne à F ou non), l'ensemble de toutes les suites T de F différentes deux à deux et telles que $T \prec S$ est au plus dénombrable.

Pour établir l'équivalence entre les propositions C_9, C_{10}, C_{11} et C_{12}, il suffit évidemment de prouver les quatre implications

$$C_9 \rightarrow C_{10} \rightarrow C_{11} \rightarrow C_{12} \rightarrow C_9.$$

1° $C_9 \rightarrow C_{10}$. Admettons la proposition C_9: il existe donc une suite infinie convergente $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots$ de fonctions d'une variable réelle qui convergent non uniformément sur chaque ensemble indénombrable. Nous définirons la suite double de fonctions $f_n^m(x)$ comme il suit: posons pour tout $m = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots$ et x réel:

$$(1) \quad f_n^m(x) = 0, \quad si \quad |\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \frac{1}{m} \qquad pour \quad p > n \ et \ q > n$$

et $f_n^m(x) = 1$ dans le cas contraire.

Fixons un m et un x. La suite $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots$, étant par hypothèse convergente, il existe un indice $r = r\,(m, x)$ tel que

$$|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \frac{1}{m} \qquad pour \quad p > r \quad et \quad q > r.$$

Nous en concluons tout de suite selon (1) que l'on a $f_n^m(x) = 0$ pour $n > r$, ce qui donne

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty} f_n^m(x) = 0.$$

La formule (2) étant ainsi vraie pour tout m naturel et pour tout x réel, nous n'avons qu'à poser $f^m(x) = 0$ pour $m = 1, 2, 3, \dots$ pour en tirer les formules (i) et (ii).

Soit maintenant $m_1, m_2, m_3, \dots$ une suite infinie croissante de nombres naturels et admettons que l'égalité (iii) ait lieu pour un ensemble indénombrable N de valeurs de x. Les fonctions $f_n^m(x)$

ne prenant que deux valeurs 0 et 1, on en conclut qu'il existe pour tout nombre $x \in N$ un indice $\mu(x)$ tel que l'on ait

$$f_{n_k}^{m_k}(x) = 0 \qquad pour \quad k > \mu(x).$$

Il en résulte en vertu de (1) que

$$(3) \quad |\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \frac{1}{m_k} \qquad pour \quad p > n_k, q > n_k, k > \mu(x) \ et \ x \in N.$$

L'ensemble N étant indenombrable et celui de tous les indices naturels étant dénombrable, il existe un nombre naturel s tel que l'égalité $\mu(x) = s$ se présente pour une infinité indénombrable de nombres $x \in N$. Soit N_1 leur ensemble. D'après (3) on a donc

$$|\varphi_p(x) - \varphi_q(x)| < \frac{1}{m_k} \qquad pour \quad p > n_k, q > n_k, k > s \quad et \quad x \in N_1.$$

Comme $m_k \geqslant k$ (la suite infinie d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$ étant croissante), il en résulte aussitôt que la suite infinie de fonctions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots$ converge uniformément sur l'ensemble indénombrable N_1, contrairement à la propriété admise de cette suite.

Ainsi l'égalité (iii) ne peut être vérifiée que pour les nombres réels x formant un ensemble au plus dénombrable. La condition (iii) de la proposition C_{10} est donc également réalisée.

2° $C_{10} \to C_{11}$. Admettons la proposition C_{10} et soient $f^m(x)$ et $f_n^m(x)$ les suites de fonctions qui satisfont aux conditions (i) — (iii) de la proposition C_{10}.

Posons pour i et k naturels, où $k > 1$:

$$(4) \qquad B_1^i = \sum_{n=1}^{\infty} \underset{x}{E} \left[|f_n^i(x) - f^i(x)| < \frac{1}{i} \right]$$

et

$$(5) \quad B_k^i = \prod_{n=k}^{\infty} \underset{x}{E} \left[|f_n^i(x) - f^i(x)| < \frac{1}{i} \right] - \underset{x}{E} \left[|f_{k-1}^i(x) - f^i(x)| < \frac{1}{i} \right].$$

Nous allons montrer que la suite double d'ensembles B_k^i satisfait aux conditions (I) — (II) de la proposition C_{11}.

Soit à ce but i un indice et x un nombre réel donnés. D'après (i) il existe un indice p tel que

$$|f_n^i(x) - f^i(x)| < \frac{1}{i} \qquad pour \quad n \geqslant p;$$

soit k le plus petit de tels indices p. On déduit sans peine de (4) et (5) que l'on a alors $x \in B_k^i$. La suite double B_k^i satisfait donc à la condition (I) et les formules (4) et (5) montrent d'elles-mêmes qu'elle remplit aussi la condition (II).

Soit maintenant $n_1, n_2, n_3, \ldots$ une suite infinie de nombres naturels. On a encore selon (4) et (5)

$$B_1^m + B_2^m + \ldots + B_{n_m}^m = \prod_{p=n_m}^{\infty} \underset{x}{E}\left[|f_p^m(x) - f^m(x)| < \frac{1}{m}\right]$$

et

$$(6) \quad \prod_{m=1}^{\infty} (B_1^m + B_2^m + \ldots + B_{n_m}^m) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{p=n_m}^{\infty} \underset{x}{E}\left[|f_p^m(x) - f^m(x)| < \frac{1}{m}\right].$$

Soit x un nombre réel, tel que

$$(7) \qquad x \in \prod_{m=1}^{\infty} (B_1^m + B_2^m + \ldots + B_{n_m}^m).$$

Il vient en vertu de (6)

$$|f_p^m(x) - f^m(x)| < \frac{1}{m} \qquad pour \quad p \geqslant n_m \quad et \quad m = 1, 2, \ldots,$$

d'où en particulier

$$|f_{n_m}^m(x) - f^m(x)| < \frac{1}{m} \qquad pour \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

ce qui donne d'après (ii)

$$\lim_{m=\infty} f_{n_m}^m(x) = 0.$$

Or, en vertu de la proposition C_{10}, cette égalité ne peut être remplie que pour les nombres réels x formant un ensemble au plus dénombrable. La formule (7) ne peut donc se présenter que tout au plus pour une infinité dénombrable des x, de sorte que la suite double $\{B_k^i\}$ satisfait également à la condition (III) de la proposition C_{11}.

3° $C_{11} \to C_{12}$ [1]). Admettons la proposition C_{11} et soit $\{B_k^i\}$ la suite double d'ensembles satisfaisant aux conditions (I) — (III) de la proposition C_{11}. Désignons par F la famille de toutes les suites infinies de nombres naturels $n_1, n_2, n_3, \ldots$ telles que le produit $\prod_{i=1}^{\infty} B_{n_i}^i$ n'est pas vide. Nous allons montrer que la famille F satisfait à la condition de la proposition C_{12}.

On voit tout d'abord que la famille F est de puissance du continu. Car d'une part, selon la condition (III) de la proposition C_{11}, chaque produit $\prod_{i=1}^{\infty} B_{n_i}^i$ est au plus dénombrable et d'autre part, selon la condition (I) de C_{11}, l'ensemble-somme de tous les produits de ce genre coïncide avec l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels.

Or, considérons une suite infinie quelconque de nombres naturels $S = (k_1, k_2, k_2, \ldots)$. L'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} (B_1^i + B_2^i + \ldots + B_{k_i}^i)$ étant au plus dénombrable selon la condition (III) de C_{11}, il n'y a parmi les produits $\prod_{i=1}^{\infty} B_{n_i}^i$ qui viennent correspondre aux suites différentes $n_1, n_2, n_3, \ldots$ avec $n_i \leqslant k_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ que tout au plus une infinité dénombrable qui ne soient pas vides, puisque deux produits de ce genre sont toujours disjoints d'après la condition (II) de C_{11}. Cela veut dire précisément que l'ensemble des suites T appartenant à la famille F et telles que $T \prec S$ est au plus dénombrable.

4° $C_{12} \to C_9$. Admettons la proposition C_{12} et soit F une famille de suites infinies de nombres naturels qui satisfait à cette proposition. La famille F étant de puissance $2^{\aleph_0}$, on peut représenter les suites qui lui appartiennent par T_x où x parcourt l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels et on peut le faire d'une manière à avoir $T_x \neq T_y$ pour $x \neq y$.

---

[1]) L'équivalence des propositions C_{11} et C_{12} a été démontrée par M. M. Banach et Kuratowski, *Fund. Math.* XIV, p. 131.

Soit $T_x = (n_1^x, n_2^x, n_3^x, ...)$. Nous définirons la suite de fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ...$ comme il suit. Etant donnés un x réel et un n naturel, si n est un terme de la suite infinie

$$(8) \qquad n_1^x, n_2^x, n_3^x, ...,$$

soit p le plus petit indice tel que $n = n_p^x$; nous poserons dans ce cas $f_n(x) = \frac{1}{p}$ et, si n n'est pas un terme de la suite (8), nous poserons $f_n(x) = 0$.

La suite infinie des fonctions $f_1(x), f_2(x), f_3(x), ...$ est ainsi définie pour tout x réel. Nous allons montrer qu'elle satisfait à la proposition C_9.

Soit x un nombre réel et q un nombre naturel quelconques. La définition de $f_n(x)$ implique que pour $n > n_1^x + n_2^x + ... + n_q^x = \mu_q(x)$ on a soit $f_n(x) = \frac{1}{v}$ où $p > q$, soit $f_n(x) = 0$. On a donc toujours

$$0 \leqslant f_n(x) < \frac{1}{q} \qquad \textit{pour} \quad n > \mu_q(x),$$

d'où

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 0 \qquad \textit{pour tout } x \textit{ réel.}$$

D'autre part, soit N un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels et supposons que la suite $f_1(x), f_2(x), ...$ converge uniformément pour tout $x \in N$. Il existerait par conséquent pour tout i naturel un indice q_i tel que

$$(9) \qquad |f_n(x)| < \frac{1}{i} \qquad \textit{pour} \quad x \in N \quad \textit{et} \quad n \geqslant q_i.$$

Or, d'après la définition de la suite $f_n(x)$ $(n = 1, 2, ...)$ nous avons

$$f_{n_i^x}(x) \geqslant \frac{1}{i} \qquad \textit{pour} \quad i = 1, 2, 3, ... \quad \textit{et} \quad x \textit{ réel,}$$

ce qui donne selon (9)

$$n_i^x < q_i \qquad \textit{pour} \quad x \in N \quad \textit{et} \quad i = 1, 2, 3, ...$$

En désignant donc par S la suite infinie $q_1, q_2, q_3, \ldots$, il vient

$$T_x \prec S \qquad pour \quad x \in N.$$

Comme $x \neq y$ entraîne $T_x \neq T_y$, il existerait ainsi une infinité non dénombrable de suites différentes T_x telles que $T_x \prec S$ et on se trouverait de la sorte en contradiction avec la proposition C_{12}. La suite infinie $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ satisfait donc à la proposition C_9, c. q. f. d.

Ainsi, *les propositions* C_9, C_{10}, C_{11} *et* C_{12} *sont équivalentes.*

Le problème si elles sont équivalentes aussi à l'hypothèse H ou à la proposition C_1, dont elles sont des conséquences, reste ouvert.

§ 7. Origines et applications des propositions $C_9 - C_{12}$.

La proposition C_9 a été établie par moi (à l'aide de l'hypothèse H) pour démontrer que le théorème connu de T. Egoroff, à savoir que les suites convergentes de fonctions mesurables convergent uniformément, lorsqu'on néglige un ensemble de mesure (extérieure) aussi petite qu'on le veut, n'admet pas d'extension aux fonctions quelconques d'une variable réelle [1]).

La proposition C_{10} a été démontrée par moi (aussi à l'aide de l'hypothèse H) pour montrer que le théorème de M. Fréchet sur les suites doubles de fonctions mesurables n'admet pas d'extension aux fonctions arbitraires [2]).

Le théorème de T. Egoroff implique que parmi les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfaisant à la proposition C_9 il y a qui sont non mesurables, et le théorème de M. Fréchet montre qu'il en est de même pour les fonctions $f_n^m(x)$ $(m=1,2,\ldots;\, n=1,2,\ldots)$ qui satisfont aux conditions (i) — (iii) de la proposition C_{10}.

---

[1]) *C. R. Soc. Sc. Varsovie* 1928, p. 84 — 87. Pour l'équivalence des propositions C_9 et C_{11} voir ma note dans *Fund. Math.* XIV, p. 277—280.

[2]) *Monatshefte f. Math. u. Phys.* XXXIX, p. 233. Pour l'équivalence des propositions C_{10} et C_{11} voir ma note dans *Studia Mathem.* IV, p. 15 et suiv.

La proposition C_{11} a été établie (à l'aide de l'hypothèse H) par M. M. S. Banach et C. Kuratowski [1]) pour en déduire la solution négative du *problème de la mesure généralisé* [2]). Dans une Note récente [3]) j'ai déduit la proposition C_{11} directement de la proposition C_1. Mais le théorème de MM. Banach et Kuratowski peut être déduit aussi *directement* de la proposition C_1 (sans passer par C_{11}), à savoir par l'emploi immédiat du théorème 5, établi p. 44. Une autre démonstration sera donnée au Chap. IV, § 3 (voir proposition C_{53}).

Il est à remarquer que l'on peut établir facilement l'implication suivante:

$P_4 \to C_{11}$. Admettons à ce but la proposition P_4 et soit $\{A_x^i\}$ un système d'ensembles assujetti aux conditions 1) — 3) de cette proposition. Posons

(10) $$B_k^i = A_k^i \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, 3, \ldots \quad \textit{et} \quad k = 2, 3, 4, \ldots$$

et

(11) $$B_1^i = \mathcal{E} - \sum_{k=2}^{\infty} B_k^i .$$

Nous allons montrer que le système d'ensembles B_k^i satisfait aux conditions (I) — (III) de la proposition C_{11}.

Qu'il satisfait aux conditions (I) et (II) de C_{11}, cela résulte facilement de (10) et (11) en vertu des conditions 1) et 2) de P_4, admises pour A_x^i. Pour établir la condition (III) de C_{11}, considérons une suite infinie quelconque $k_1, k_2, \ldots$ de nombres naturels. Le système d'ensembles A_x^i satisfaisant à la condition 3) de la proposition P_4 et cette dernière étant, comme nous savons [4]), équivalente à la condition 3''), l'ensemble $\mathcal{E} - \sum_{i=1}^{\infty} A_{k_i+1}^i$ est au plus dénombrable. Or, la condition (II) de C_{11}, qui vient d'être établie, entraine selon (10):

---

[1]) *Fund. Math.* XIV, p. 128.

[2]) Cf. p. 44, th. 5 et plus loin Chap. IV, § 3, proposition C_{53}.

[3]) *Fund. Math.* XXII (à paraître).

[4]) Voir Chap. I, p. 18.

$$B_1^i + B_2^i + \ldots + B_{k_i}^i \subset \mathcal{E} - B_{k_i+1}^i = \mathcal{E} - A_{k_i+1}^i,$$

ce qui donne tout de suite

$$\prod_{i=1}^{\infty}(B_1^i + B_2^i + \ldots + B_{k_i}^i) \subset \prod_{i=1}^{\infty}(\mathcal{E} - A_{k_i+1}^i) = \mathcal{E} - \sum_{i=1}^{\infty} A_{k_i+1}^i,$$

de sorte que la condition (III) de C_{11} est également réalisée.

Notons que l'on peut définir *effectivement* une suite double d'ensembles B_k^i satisfaisant aux conditions (I) et (II) de la proposition C_{11} et telle que pour chaque suite infinie de nombres naturels $k_1, k_2, k_3, \ldots$, l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty}(B_1^i + B_2^i + \ldots + B_{k_i}^i)$ soit *non-dense*. Il suffit à ce but, pour tout nombre naturel i, de ranger en une suite infinie tous les intervalles $\frac{l}{i} \leqslant x < \frac{l+1}{i}$ (où $l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) et de désigner par B_k^i le k-ième terme de cette suite.

Par contre, sans admettre l'hypothèse H, nous ne savons pas démontrer l'existence d'une suite double d'ensembles B_k^i satisfaisant aux conditions (I) et (II) de C_{11} et telle que pour chaque suite infinie $k_1, k_2, k_3, \ldots$ de nombres entiers positifs, l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty}(B_1^i + B_2^i + \ldots + B_{k_i}^i)$ soit *de mesure nulle.* On voit sans peine que parmi les ensembles B_k^i formant une telle suite double il y a nécessairement des ensembles non mesurables.

§ 8. Proposition C_1^* et son équivalence avec C_1.

Nous dirons qu'une famille $\mathfrak{S}$ de suites finies de nombres naturels est *complète,* si quelle que soit la suite finie de nombres naturels $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (appartenant à $\mathfrak{S}$ ou non), il existe une suite $n_1, n_2, \ldots, n_l$ de $\mathfrak{S}$ telle que $l \geqslant k$ et $n_i = m_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$.

D'après M. C. Kuratowski on peut démontrer sans utiliser l'hypothèse H que la proposition C_1 équivaut à la proposition suivante:

Proposition C_1^*. *Il existe une suite double d'ensembles B_k^i qui satisfait aux conditions* (I) *et* (II) *de la proposition* C_{11} *et à la condition suivante*

(III*) *quelle que soit la famille complète de suites* $\mathfrak{S}$, *l'ensemble*

$$\mathcal{E} - \sum_{n_1, n_2, \dots, n_i} B^i_{n_1} \cdot B^2_{n_2} \cdot \dots \cdot B^i_{n_i},$$

où la sommation s'étend à toutes les suites $(n_1, n_2, \dots, n_i)$ de la famille $\mathfrak{S}$, *est au plus dénombrable*.

Voici une esquisse de démonstration de l'équivalence entre C_1 et C_1^* [1]).

1⁰ $C_1 \rightarrow C_1^*$. Soit N un ensemble de M. Lusin contenu dans l'ensemble $\mathfrak{N}$ des nombres irrationnels. Désignons par B_k^i l'ensemble de tous les éléments de N dont le développement en fraction continue admet le nombre k comme son i-ème dénominateur. Le système $\{B_k^i\}$ satisfait aux conditions de la proposition C_1^*.

2⁰ $C_1^* \rightarrow C_1$. Etant donnée une suite double $\{B_k^i\}$ d'ensembles satisfaisant aux conditions de la proposition C_1^*, l'ensemble de tous les nombres irrationnels $\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \dots$ pour lesquels le produit $\prod_{i=1}^{\infty} B^i_{n_i}$ est non vide constitue un ensemble de M. Lusin.

La déduction de ces implications s'appuie sur le lemme suivant, dont la démonstration n'offre pas de difficulté:

$N_{n_1, n_2, \dots, n_i}$ *désignant l'ensemble de tous les nombres irrationnels dont le développement en fraction continue admet le nombre* $\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \dots + \frac{1|}{|n_i}$ *pour i-ème reduit, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble ouvert G soit dense dans l'ensemble* $\mathfrak{N}G$, *est que la famille de toutes les suites finies de nombres naturels* $n_1, n_2, \dots, n_i$ *pour lesquelles on a* $N_{n_1, n_2, \dots, n_i} \subset G$ *soit complète.*

§ 9. Conséquences C_{13} et C_{14} de C_1.

La proposition C_1 entraîne en vertu du théorème 8, p. 47, la

Proposition C_{13}. *Il existe une suite infinie* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots$ *de fonctions d'une variable réelle telles qu'étant donnée une suite*

[1]) Une démonstration détaillée sera publiée par M. C. Kuratowski dans *Fund. Math.* XXII.

infinie croissante quelconque d'indices $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, *l'ensemble de tous les nombres réels* x *pour lesquels la limite (finie ou infinie)* $\lim_{k=\infty} \varphi_{m_k}(x)$ *existe est au plus dénombrable* [1]).

Admettons, en effet, la proposition C_1. Il existe donc un ensemble N de puissance du continu jouissant de la propriété **L**. Soit $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ une suite infinie de fonctions d'une variable réelle satisfaisant aux conditions du théorème 8. L'ensemble N étant de puissance du continu, il existe une fonction $\vartheta(x)$ qui établit une correspondance biunivoque entre les nombres x de $\mathcal{E}$ et les nombres de N. Posons $\varphi_m(x) = f_m(\vartheta(x))$ pour x réels et pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ Les fonctions $f_m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfaisant aux conditions du théorème 8, on voit sans peine que les fonctions $\varphi_m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ satisfont à la proposition C_{13}.

La proposition C_1 implique en vertu du théorème 9, p. 48, la

Proposition C_{14}. *Il existe un ensemble linéaire qui jouit de la propriété* **M** *et qui n'est pas un* F_σ [2]).

Admettons, en effet, la proposition C_1 et soit N un ensemble satisfaisant à cette proposition: Evidemment l'ensemble N n'est pas un F_σ; or, d'après le théorème 9, il jouit de la propriété **M**.

§ 10. Ensembles toujours de I-re catégorie.

Un ensemble (linéaire) est dit d'après M. N. Lusin [3]) *toujours de première catégorie,* s'il est de première catégorie de Baire sur tout ensemble (linéaire) parfait.

Un ensemble indénombrable qui est toujours de première catégorie ne peut pas être mesurable (B), ni même *analytique,* tout

---

[1]) Cette proposition (qui constitue la solution négative d'un problème posé par M. Saks) a été démontrée par moi à l'aide de l'hypothèse H dans *Fund. Math.* XVIII, p. 110 et suivantes. Cf. aussi Chap. IV, § 2, proposition C_{50}.

[2]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* VIII, p. 223. La proposition C_{14} résout un problème posé par M. K. Menger (*Sitzungsber. Akad. Wien* 133 (1924), p. 421); cf. aussi W. Hurewicz, *Fund. Math.* X, p. 196.

[3]) *Fund. Math.* XXI, p. 115.

ensemble analytique indénombrable contenant un sous-ensemble parfait. Or, le problème s'il existe un *complémentaire analytique* (linéaire) indénombrable qui soit toujours de première catégorie équivaut à un des plus difficiles problèmes de la théorie des ensembles analytiques, notamment à celui d'existence d'un complémentaire analytique indénombrable ne contenant aucun sous-ensemble parfait.

En effet, d'une part il est évident qu'un ensemble toujours de première catégorie ne contient aucun sous-ensemble parfait. D'autre part, admettons qu'il existe un complémentaire analytique (linéaire) Q, indénombrable et dépourvu de sous-ensembles parfaits. Les *constituantes* [1]) du complémentaire analytique Q, en tant que mesurables (B) [2]), sont donc toutes au plus dénombrables, et dans ce cas, comme nous avons démontré avec M. Lusin [3]), l'ensemble Q est toujours de première catégorie.

Il est à remarquer que *l'hypothèse qu'il existe un complémentaire analytique (linéaire) de puissance du continu et qui est un ensemble toujours de première catégorie implique l'hypothèse* $\boldsymbol{H}$. En effet, Q désignant un tel complémentaire analytique, il n'existe parmi les sous-ensembles de Q aucun ensemble parfait et les constituantes de Q sont toutes au plus dénombrables. Tout complémentaire analytiques étant une somme de ses $\aleph_1$ constituantes, Q est de puissance $\leqslant \aleph_1$; comme il est par hypothèse de puissance du continu, on aurait $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ [4]).

---

[1]) Voir N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques,* Paris 1930, p. 188.

[2]) Voir p. ex. C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 264.

[3]) N. Lusin et W. Sierpiński *Rend. Accad. Lincei,* vol. VII ser. 6 (1928), p. 214—215.

[4]) Un autre problème concernant les complémentaires analytiques et dont la solution positive impliquerait l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ est le suivant:

Existe-t-il une fonction d'une variable réelle $f(x)$, *dont l'image géométrique* (la „courbe" $y = f(x)$) *soit un complémentaire analytique dépourvu de sous-ensembles parfaits?* (voir N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques,* Paris 1930, p. 287).

Théorème 10. *Il existe une fonction $f(x)$ continue dans l'ensemble $\mathcal{N}\mathcal{J}$, à valeurs distinctes dans cet ensemble et qui transforme tout sous-ensemble de $\mathcal{N}\mathcal{J}$ qui jouit de la propriété* **L** *en un ensemble toujours de première catégorie* [1]).

Démonstration. Q étant un ensemble linéaire parfait et δ un nombre positif, il existe, comme on sait, une suite infinie $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ d'ensembles parfaits de diamètre $< \delta$, disjoints, situés dans Q et tels que l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ est *dense* dans Q, tandis que chacun des ensembles Q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ est *non-dense* dans Q.

Il en résulte sans peine l'existence d'un système d'ensembles parfaits $\{P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}\}$ situés dans l'intervalle $\mathcal{J}$ et assujettis à la condition: quels que soient les nombres naturels $k, n_1, n_2, \ldots, n_k$, les ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}$ $n = 1, 2, \ldots$ sont de diamètre $< \frac{1}{k}$, disjoints deux à deux, situés dans $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ et tels que l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}$ est *dense* dans $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, tandis que chacun des ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, 1}, P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, 2}, \ldots, P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}, \ldots$ y est *non-dense*.

Posons pour $k = 1, 2, 3, \ldots$:

$$S_k = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_k} P_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

(où la sommation s'étend à tous les systèmes de k nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$) et

$$T = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \ldots$$

Soit x un nombre de l'ensemble $\mathcal{N}\mathcal{J}$ et

$$x = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \frac{1|}{|n_3} + \ldots$$

son développement en fraction continue infinie. On déduit de la définition des ensembles $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ que

$$f(x) = P_{n_1} \cdot P_{n_1, n_2} \cdot P_{n_1, n_2, n_3} \cdots$$

---

[1]) Voir N. Lusin, *Fund. Math.* XXI, p. 119—122.

est un point bien déterminé de l'ensemble T. La fonction $f(x)$ établit, comme on voit sans peine, une correspondance biunivoque entre les nombres x appartenant à l'ensemble $\mathcal{NJ}$ et les points de l'ensemble T. Le diamètre de l'ensemble $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}$ étant $< 1/k$, on montre aussi que la fonction $f(x)$ est continue dans $\mathcal{NJ}$.

Soit enfin P un ensemble parfait quelconque. Posons

$$R = \underset{x}{E}\,[x \in \mathcal{NJ},\ f(x) \in P]. \tag{12}$$

L'ensemble P étant fermé et la fonction $f(x)$ continue dans $\mathcal{NJ}$, l'ensemble R est fermé dans $\mathcal{NJ}$. Comme tel, il admet donc une décomposition en deux ensembles disjoints

$$R = R_1 + R_2, \tag{13}$$

où R_1 est *non-dense* et R_2 *ouvert* dans $\mathcal{NJ}$.

Nous allons montrer d'abord que l'ensemble $f(R_2)$ est *de première catégorie* dans P.

Etant donnée, en effet, une suite finie de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots, n_k$, désignons par $Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ l'ensemble de tous les nombres x de $\mathcal{NJ}$ dont le développement en fraction continue admet comme son k-ième réduit le nombre $\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_k}$.

L'ensemble $Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ est donc une *portion* de $\mathcal{NJ}$, notamment le produit de $\mathcal{N}$ par l'intervalle

$$\left[\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_k},\quad \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_{k-1}} + \frac{1|}{|n_k + 1}\right]$$

ou

$$\left[\frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_{k-1}} + \frac{1|}{|n_k + 1},\quad \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_k}\right],$$

suivant que k est pair ou impair.

On voit sans peine que tout ensemble ouvert dans $\mathcal{NJ}$, donc en particulier l'ensemble R_2, est la somme d'un nombre fini on d'une infinité dénombrable d'ensembles $Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$. La définition de la fonction $f(x)$ montre que

$$(14) \qquad f(Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k}) = T \cdot P_{n_1, n_2, \ldots, n_k},$$

quelle que soit la suite finie d'indices $n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Pour tout $Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset R_2$ on a donc en vertu de (12), (13) et (14)

$$(15) \qquad T \cdot P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset P$$

et on conclut des définitions de T et des ensembles parfaits $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ que T est dense dans $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$; ce dernier étant fermé (de même que l'ensemble P), on tire donc de (15)

$$(16) \qquad P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset P.$$

D'autre part, il vient selon la définition de T

$$T \cdot P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \subset \sum_{n=1}^{\infty} P_{n_1, n_2, \ldots, n_k, n}$$

où le membre droit est de première catégorie dans l'ensemble $P_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, en tant qu'une somme dénombrable des ensembles non-denses dans lui. Il en est donc de même du membre gauche; en vertu de (16) et (14) on en conclut aussitôt que l'ensemble $f(Q_{n_1, n_2, \ldots n_k})$ est de première catégorie dans P. L'ensemble R_2 étant composé d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles $Q_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$, l'ensemble $f(R_2)$ est donc encore de première catégorie dans P.

Ceci établi, soit N un ensemble contenu dans $\mathfrak{D}$ et jouissant de la propriété **L**. Il s'agit de montrer que l'ensemble $f(N)$ est de première catégorie dans P.

Or, d'après (12) on a $P \cdot f(N) = f(NR)$, d'où en vertu de (13) $P \cdot f(N) = f(NR_1) + f(NR_2)$. L'ensemble R_1 étant non-dense et l'ensemble N jouissant de la propriété **L**, l'ensemble NR_1, donc aussi l'ensemble $f(NR_1)$, est au plus dénombrable. Evidemment on a $f(NR_2) \subset f(R_2)$ et l'ensemble $f(R_2)$ est, comme nous savons, de première catégorie dans P. L'ensemble $P \cdot f(N) = f(NR) = f(NR_1) + f(NR_2)$ est donc aussi de première catégorie dans P, c. q. f. d.

§ 11. Proposition C_{15} et ses conséquences $C_{16} - C_{19}$.

En vertu du théorème 10, la proposition C_1 implique immédiatement cette

Proposition C_{15}. *Il existe un ensemble linéaire K de puissance du continu, toujours de première catégorie et qui est une image continue et biunivoque d'un ensemble jouissant de la propriété* **L**.

Le cas particulier du théorème 1 est que toute image continue d'un ensemble linéaire jouissant de la propriété **L** jouit de la propriété **C**. La proposition C_{15} entraîne donc tout de suite la

Proposition C_{16}. *Il existe un ensemble linéaire K de puissance du continu, toujours de première catégorie et qui jouit de la propriété* **C**.

Un tel ensemble doit être regardé comme extrêmement pauvre en éléments aussi bien au point de vue de la catégorie, qu'au point de vue de la mesure.

D'après la conséquence C_{15} de C_1, il existe un ensemble linéaire de puissance du continu qui est toujours de première catégorie. Nous ne savons pas démontrer l'existence d'un tel ensemble sans admettre l'hypothèse H. Or, on démontre sans admettre cette hypothèse qu'il existe un ensemble linéaire indénombrable (de puissance $\aleph_1$) qui est toujours de première catégorie [1]. Cependant on sait démontrer le théorème suivant sans admettre l'hypothèse H:

Φ étant une famille de puissance $\aleph_1$ de fonctions mesurables d'une variable réelle et Π une famille de puissance $\aleph_1$ d'ensembles linéaires parfaits, il existe un ensemble linéaire indénombrable que chaque fonction de la famille Φ transforme en ensemble qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait appartenant à la famille Π [2].

---

[1]) N. Lusin, *Fund. Math.* II, p. 155; W. Sierpiński, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV, p. 102.

[2]) Voir W, Sierpiński, dans *Fund. Math.* XXII, p. 47.

La propriété d'être un ensemble *toujours de première catégorie* étant évidemment héréditaire [1]) et chaque ensemble de puissance du continu ayant $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-ensembles, la proposition C_{15} entraîne aussitôt cette

Proposition C_{17}. *La famille de tous les ensembles linéaires qui sont toujours de première catégorie est de puissance* $2^{2^{\aleph_0}}$.

Comme tout ensemble qui est toujours de première catégorie jouit évidemment de la propriété de Baire, la proposition C_{17} entraîne à son tour la

Proposition C_{18}. *La famille de tous les ensembles linéaires qui jouissent de la propriété de Baire est de puissance* $2^{2^{\aleph_0}}$.

Etant donné un ensemble toujours de première catégorie, sa *fonction caractéristique* (c. à d. qui prend la valeur 1 aux points de cet ensemble et la valeur 0 partout ailleurs) satisfaitit évidemment à la condition de Baire. La proposition C_{17} entraîne donc encore la suivante

Proposition C_{19}. *La famille de toutes les fonctions d'une variable réelle qui satisfont à la condition de Baire est de puissance* $2^{2^{\aleph_0}}$.

D'après R. Baire toute fonction représentable analytiquement satisfait à la condition de Baire [2]). La famille de toutes les fonctions représentables analytiquement d'une variable réelle ayant, comme on soit, la puissance du continu, donc une puissance $< 2^{2^{\aleph_0}}$, on conclut de C_{19} qu'*il existe des fonctions d'une variable réelle satisfaisant à la condition de Baire, mais non représentables analytiquement*.

Cette proposition a été déduite de l'hypothèse H par M. N. Lusin en 1914 [3]) et ensuite démontrée par lui sans utiliser cette

---

[1]) au sens de la définition, p. 28.

[2]) La démonstration de ce théorème a été donnée pour la première fois dans le Mémoire de M. H. Lebesgue, *Journ. de Math.* (1905), p. 188.

[3]) *C. R. Paris* 158, p. 1259.

hypothèse [1]). On a trouvé même des exemples *effectifs* de fonctions satisfaisant à la condition de Baire, mais non représentables analytiquement [2]), ce qui a donné la solution complète d'une question posée par M. Lebesgue, l. c. [3]).

Au sujet des conséquences $C_{17} - C_{19}$ de C_{15} il est à remarquer, en outre, ce qui suit. Comme il a été déjà dit, on sait établir sans l'hypothèse H l'existence d'un ensemble linéaire de puissance $\aleph_1$ et qui est toujours de première catégorie. Cet ensemble ayant $2^{\aleph_1}$ sous-ensembles, il en résulte sans peine qu'on peut démontrer sans admettre l'hypothèse H que *la famille de tous les ensembles linéaires qui sont toujours de première catégorie* et, par suite, *la famille de toutes les fonctions d'une variable réelle qui satisfont à la condition de Baire, ont une puissance* $\geqq 2^{\aleph_1}$, *donc dépassant* $\aleph_1$.

§ 12. Images géométriques des fonctions. Fonctions superposées. Proposition C_{20} et ses conséquences $C_{21} - C_{24}$.

A présent nous allons déduire de C_1 une conséquence (d'origine récente) dont nous ferons ensuite quelques applications aux images géométriques des fonctions réelles sur le plan.

Soit N un ensemble linéaire ayant la propriété **L** et situé dans l'ensemble $\mathcal{N}\mathcal{J}$. Considérons une fonction $f(x)$ continue dans ce dernier et satisfaisant au théorème 10. L'ensemble $K = f(N)$ est donc *toujours de première catégorie* au sens de la définition p. 63.

Soit J l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \in N$ et $y = f(x)$. La fonction $f(x)$ étant continue dans N, on voit sans peine que l'ensemble J est homéomorphe à N. Plaçons l'ensemble K sur l'axe OY: c'est évidemment la *projection* de l'ensemble J sur l'axe OY.

---

[1]) *Fund. Math.* II, p. 157.

[2]) Voir p. ex. N. Lusin et W. Sierpiński, *Journ. de Math.* II (1923), p. 72.

[3]) Cf. aussi N. Lusin, *Fund. Math.* XX, p. 114—116.

Soient S l'ensemble-somme de toutes les parallèles à l'axe OX passant par les points de l'ensemble K et T l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $x \in \mathcal{NQ}$ et $y = f(x)$. La fonction $f(x)$ étant continue dans l'ensemble $\mathcal{NQ}$, qui est un G_δ, on voit sans peine que l'ensemble T est aussi un G_δ. De plus, la fonction $f(x)$ étant à valeurs distinctes dans $\mathcal{NQ}$, on a $J = ST$.

Or, si l'ensemble S jouissait de la propriété de Baire, il en serait de même de l'ensemble $J = ST$ (car le produit de deux ensembles jouissant de la propriété de Baire jouit également de cette propriété). J étant homéomorphe à N et la propriété de Baire étant, comme j'ai démontré [1]), invariante envers les transformations homéomorphes, l'ensemble N jouirait de la propriété de Baire, ce qui est incompatible en vertu du th. 2, p. 41, avec la propriété **L** de N. Par conséquent l'ensemble S est dépourvu de la propriété de Baire.

La conséquence suivante de C_1 se trouve ainsi démontrée:

Proposition C_{20}. *Il existe un ensemble linéaire K situé sur l'axe d'ordonnées et jouissant de la propriété de Baire (même un ensemble toujours de première catégorie) tel que l'ensemble plan S formé de toutes les parallèles à l'axe d'abscisses qui passent par les points de K ne jouit pas de la propriété de Baire* [2]).

Ceci établi, définissons comme il suit une nouvelle fonction $g(y)$ de variable réelle, en conservant les notations précédentes.

Si y *non*-$\in K$, posons $g(y) = -1$.

Si $y \in K$, il existe dans N un x bien déterminé tel que $y = f(x)$, car $K = f(N)$ et la fonction $f(x)$ est à valeurs distinctes dans N; nous poserons alors $g(y) = x$.

La fonction $g(y)$ satisfait évidemment à la condition de Baire, puisque $\underset{y}{E}[g(y) \neq -1] = K$ est un ensemble toujours de première catégorie. Or, l'*image géométrique* $\mathfrak{G}$ de la fonction $g(y)$,

1) *Fund. Math.* IV, p. 319.

2) Voir ma Note dans *C. R. Paris*, 197, p. 1716 (Note du 26 décembre 1933); cf. aussi *Fund. Math.* XXII, p. 54.

c. à d. l'ensemble de tous les points (x, y) du plan tels que $x = g(y)$, ne jouit pas de la propriété de Baire, puisque si $\mathfrak{G}$ jouissait de cette propriété, il en serait de même de l'ensemble $\mathfrak{G} - \underset{(x,y)}{E}[x = -1]$, qui coïncide évidemment avec l'ensemble J. Cependant, comme nous avons vu plus haut, J ne jouit pas de la propriété de Baire. Nous avons donc cette

Proposition C_{21}. *Il existe une fonction (d'une variable réelle) qui satisfait à la condition de Baire, mais dont l'image géométrique ne jouit pas de la propriété de Baire.*

Plus loin nous déduirons d'une autre conséquence de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ une proposition en quelque sorte réciproque, notamment qu'il existe une fonction ne remplissant pas la condition de Baire et dont l'image géométrique jouit de la propriété de Baire (voir Chap. III, proposition C_{44}).

La remarque suivante et la conséquence C_{22} sont dues à M. C. Kuratowski.

Soient K et S les ensembles satisfaisant à la proposition C_{20} et posons $f(x, y) = 1$ ou $f(x, y) = 0$, suivant que $(x, y) \in S$ ou (x, y) *non*-$\in S$. La fonction $f(x, y)$ *de deux* variables réelles, ainsi définie, ne satisfait pas à la condition de Baire, puisque l'ensemble S n'a pas la propriété de Baire. Or, la fonction $f(x, y)$ ne dépend évidemment que de la variable y et si l'on pose pour x et y réels $f(x, y) = \varphi(y)$, la fonction $\varphi(y)$ comme fonction *d'une seule* variable réelle y, jouit de la propriété de Baire, puisque $\underset{y}{E}[\varphi(y) \neq 0] = K$ et K est un ensemble toujours de première catégorie.

D'autre part, posons pour x et y réels $F(x, y) = y$. C'est évidemment une fonction continue de deux variables réelles. Or, $\varphi(y)$ étant la fonction caractéristique de l'ensemble (linéaire) K, donc une fonction d'une variable réelle satisfaisant à la condition de Baire, la fonction $F(x, \varphi(y))$ est la fonction caractéristique de l'ensemble (plan) S, donc une fonction qui ne satisfait pas à la

condition de Baire. On aboutit ainsi à la conséquence suivante de C_{20}:

Proposition C_{22}. *Une fonction continue de deux fonctions* (d'une variable réelle) *satisfaisant à la condition de Baire peut* (comme fonction de deux variable réelles) *ne pas satisfaire à la condition de Baire.*

Pour les fonctions continues d'une fonction (d'une variable réele) satisfaisant à la condition de Baire un tel cas est, comme on sait, impossible. Or, nous allons déduire de C_1 (voir plus loin C_{24}, p. 75) que, par contre, il existe des fonctions satisfaisant à la condition de Baire d'une fonction continue (d'une variable réelle) qui ne satisfont pas à la condition de Baire.

Considérons d'abord une courbe continue de Peano

$$(17) \qquad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad \text{où} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

remplissant le carré $\mathcal{I}^2 = [0 \leqslant x \leqslant 1; 0 \leqslant y \leqslant 1]$. On peut la définir, comme on sait, d'une manière que les points du carré $\mathcal{I}^2$ aux deux coordonnées irrationnelles soient des points *simples* de la courbe (17), c. à d. qu'il existe pour tout couple (x_0, y_0) de deux nombres irrationnels de l'intervalle $\mathcal{I}$ un nombre réel *unique* t_0 de cet intervalle tel que $x_0 = \varphi(t_0)$ et $y_0 = \psi(t_0)$. Telles sont p. ex. les „courbes remplissant le carré" définies en effet par G. Peano et par M. D. Hilbert.

Posons encore $\psi(x) = \psi(0)$ pour $x < 0$ et $\psi(x) = \psi(1)$ pour $x > 1$. La fonction $\psi(x)$ ainsi prolongée est continue pour tout x réel.

Soit M la courbe gauche

$$(18) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = t \qquad \text{où} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

enfin, soient U l'ensemble de tous les points (a, b) du carré $\mathcal{I}^2$ tels que la droite $x = a$, $y = b$ rencontre l'ensemble M en un seul point et V l'ensemble de tous les nombres t de l'intervalle $\mathcal{I}$ tels que $(\varphi(t), \psi(t)) \in U$.

La courbe (18) étant continue et bornée, on voit sans peine que les formules

$$(19) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

établissent une homéomorphie entre les points t de l'ensemble V et les points (x, y) de l'ensemble U.

Considérons un ensemble $N \subset \mathfrak{M}$ satisfaisant à la proposition C_1, c. à d. jouissant de la propriété **L**. On a donc pour tout $x \in N$ les relations $x \in \mathfrak{M}$ et $f(x) \in \mathfrak{M}$ où $f(x)$ désigne une fonction satisfaisant au théorème 10, p. 65.

L'ensemble $A = \underset{(x,y)}{E}[x \in N;\ y = f(x)]$ est donc contenu dans U et en posant $B = \underset{t}{E}[t \in V;\ (\varphi(t), \psi(t)) \in A]$, on voit que les formules (19) établissent aussi une homéomorphie entre les points (x, y) de A et les points t de B. Or, l'ensemble A est comme nous savons, homéomorphe à N et l'ensemble $f(N)$ est une projection biunivoque de A sur l'axe OY. Il en résulte tout de suite que $\psi(B) = f(N)$ et que ψ est une fonction à valeurs distinctes dans B. Comme ensemble homéomorphe à N, l'ensemble B ne jouit pas de la propriété de Baire. Ainsi, on parvient à la

Proposition C_{23}. *Il existe une fonction continue de variable réelle transformant d'une façon biunivoque un certain ensemble dépourvu de la propriété de Baire en un ensemble qui est toujours de première catégorie.*

L'ensemble B, en tant que ne jouissant pas de la propriété de Baire, est indénombrable et il existe pour un intervalle I une décomposition $IB = E_1 + E_2$ en deux ensembles disjoints, indénombrables dans chaque sous-intervalle de I. Or, l'ensemble B étant homéomorphe à N, chaque sous-ensemble non dénombrable de B est homéomorphe à un sous-ensemble non dénombrable de N, donc, d'après le théorème 2, p. 41, à un ensemble qui ne jouit pas de la propriété de Baire. Par conséquent aucun sous-ensemble indénombrable de B ne jouit de la propriété de Baire. Il en résulte que les ensembles E_1 et E_2 sont partout de deuxième catégorie dans I.

Définissons maintenant la fonction $\vartheta(x)$ d'une variable réelle comme il suit. Posons

(19) $\vartheta(x) = 1 \quad pour \quad x \in \psi(E_1)$

et

(20) $\vartheta(x) = 0 \quad pour \quad x \; non\text{-}\in \psi(E_1)$.

C'est évidemment une fonction satisfaisant à la condition de Baire, car l'ensemble

$$\underset{x}{E}[\vartheta(x) \neq 0] = \psi(E_1) \subset \psi(B) = f(N),$$

en tant que contenu dans $f(N)$, est toujours de première catégorie.

Or, posons

(21) $f(x) = \vartheta(\psi(x)) \quad pour \; tout \; x \; réel;$

c'est donc une fonction satisfaisant à la condition de Baire d'une fonction continue (d'une variable réelle).

Si $x \in E_1$, on a d'après (19) et (21) $f(x) = 1$. Si $x \in E_2$, on a d'après (20) et (21) $f(x) = 0$, la fonction $\psi(x)$ étant à valeurs distinctes dans $IB = E_1 + E_2$. Par conséquent:

$$\underset{x}{E}[f(x) = 1] \supset E_1 \qquad et \qquad \underset{x}{E}[f(x) = 0] \supset E_2$$

et, les ensembles E_1 et E_2 étant partout de deuxième catégorie dans l'intervalle I, il en résulte que la fonction $f(x)$ ne satisfait pas à la condition de Baire. On a ainsi cette

Proposition C_{24}. *Il existe une fonction de variable réelle qui ne satisfait pas à la condition de Baire et qui est une fonction satisfaisant à la condition de Baire d'une fonction continue* [1]).

---

[1]) Cf. W. Sierpiński, *Annals of Mathematics* 1934 (à paraître).

CHAPITRE III.

Applications aux relations entre catégorie et mesure.

§ 1. Proposition C_{25} ($C_{25}a$) sur la dualité entre première catégorie et mesure nulle. Conséquence C_{26} ($C_{26}a$).

Les conséquences de l'hypothèse H, qui ont été déduites dans le chapitre précédent, découlent directement de la proposition C_1 de M. N. Lusin, de sorte qu'on a pas besoin de faire intervenir dans leur démonstration d'autres conséquences de cette hypothèse. A présent nous ferons des applications de l'ensemble de M. N. Lusin aux propositions qui seront déduites de l'hypothèse H par des voies différentes.

La majeure partie de ce chapitre est consacrée aux questions liées avec une sorte de *dualité* qui s'observe entre les notions d'ensemble de *première catégorie* et d'ensemble de *mesure nulle*. On connait notamment plusieurs théorèmes qui restent vrais, quand on remplace dans leurs énoncés les ensembles de première catégorie par ceux de mesure nulle, ou inversement [1]). Nous verrons aussitôt que la raison de ce fait est d'un ordre très général et nous en poursuivrons les conséquences dans plusieurs problèmes particuliers, en faisant l'usage fréquent de la proposition C_1.

---

[1]) Tel est p. ex. (outre les théorèmes exprimant l'*hérédité* et l'*additivité absolue* des deux notions) le lemme que j'ai établi dans les *Fund. Math.* XI, p. 302 (cf. aussi *Bull. Acad. Polonaise* 1928, p. 456, lemme 2).

Nous allons déduire de l'hypothèse ***H*** la conséquence suivante qui explique la dualité en question:

Proposition C_{25}. *Il existe une fonction biunivoque $f(x)$ définie dans l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels, telle que $f(\mathcal{E})=\mathcal{E}$ et qui transforme chaque ensemble $E\subset\mathcal{E}$ de première catégorie en ensemble $f(E)$ de mesure nulle, tandis que sa fonction inverse $f^{-1}(x)$ transforme, réciproquement, tout ensemble $E\subset\mathcal{E}$ de mesure nulle en ensemble $f^{-1}(E)$ de première catégorie.*

Démonstration. La famille de tous les F_σ linéaires de première catégorie étant de puissance du continu, il existe en vertu de l'hypothèse ***H*** une suite transfinie du type Ω

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots, \Phi_\omega, \Phi_{\omega+1}, \ldots, \Phi_\xi, \ldots, \qquad (\xi<\Omega) \tag{1}$$

formée de tous les ensembles linéaires F_σ de première catégorie. Pareillement, la famille de tous les G_δ linéaires de mesure nulle étant de puissance du continu, l'hypothèse ***H*** entraîne l'existence d'une suite transfinie du type Ω

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_\omega, \Gamma_{\omega+1}, \ldots, \Gamma_\xi, \ldots, \qquad (\xi<\Omega) \tag{2}$$

formée de tous les ensembles linéaires G_δ de mesure nulle.

Posons pour tout $\alpha<\Omega$

$$S_\alpha = \sum_{\xi<\alpha}\Phi_\xi \text{ [1]} \tag{3}$$

— ce sont encore des ensembles F_σ de première catégorie — et supprimons dans la suite transfinie

$$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_\omega, S_{\omega+1}, \ldots, S_\xi, \ldots \qquad (\xi<\Omega) \tag{4}$$

tous les S_α pour lesquels l'ensemble $S_\alpha-\sum_{\xi<\alpha}S_\xi$ est au plus dénombrable. Chaque ensemble de première catégorie admettant dans son complémentaire un F_σ indénombrable de première catégorie,

---

[1]) Pour $\alpha=1$ on entendra par $\sum_{\xi<\alpha}\Phi_\xi$ l'ensemble vide.

il est aisé de voir que les termes non supprimés de la suite (4) formeront encore une suite transfinie du type Ω

(5) $$S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, S_{\alpha_3}, \ldots, S_{\alpha_\omega}, S_{\alpha_{\omega+1}}, \ldots, S_{\alpha_\xi}, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

et que tous les ensembles

(6) $$Q_\mu = S_{\alpha_\mu} - \sum_{\xi<\mu} S_{\alpha_\xi} \qquad (\mu < \Omega)$$

seront indénombrables.

En outre, tout ensemble linéaire de première catégorie (en tant que situé dans un F_σ de première catégorie) est contenu dans un terme de la suite (5).

Or, posons pout tout $\alpha < \Omega$

(7) $$T_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} \Gamma_\xi$$

— ce sont des ensembles $G_{\delta\sigma}$ de mesure nulle — et supprimons dans la suite transfinie

(8) $$T_1, T_2, T_3, \ldots, T_\omega, T_{\omega+1}, \ldots, T_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

tous les ensembles T_α pour lesquels l'ensemble $T_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} T_\xi$ est au plus dénombrable. Chaque ensemble de mesure nulle admettant dans son complémentaire un G_δ indénombrable de mesure nulle, on constate aisément que les termes non supprimés de la suite (8) forment encore une suite transfinie du type Ω

(9) $$T_{\beta_1}, T_{\beta_2}, \ldots, T_{\beta_\omega}, T_{\beta_{\omega+1}}, \ldots, T_{\beta_\xi}, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

et que tous les ensembles

(10) $$R_\mu = T_{\beta_\mu} - \sum_{\xi<\mu} T_{\beta_\xi}$$

sont indénombrables.

En outre, tout ensemble linéaire de mesure nulle (en tant que situé dans un G_δ de mesure nulle) est contenu dans un terme de la suite (9).

Tous les ensembles (6) et (10) étant indénombrables, donc d'après l'hypothèse ***H*** de puissance du continu, il existe pour tout

nombre ordinal $\mu < \Omega$ une correspondance biunivoque entre les éléments des ensembles Q_μ et R_μ.

Or, les ensembles Q_μ ($\mu < \Omega$) sont deux à deux disjoints et leur somme forme l'ensemble $\mathcal{E}$. Pareillement, les ensembles R_μ ($\mu < \Omega$) sont deux à deux disjoints et leur somme forme l'ensemble $\mathcal{E}$. Les correspondances biunivoques entre les ensembles Q_μ et R_μ, où $1 \leqslant \mu < \Omega$, déterminent donc une transformation biunivoque $f(x)$ de l'ensemble $\mathcal{E}$ en lui-même, telle que $f(Q_\mu) = R_\mu$ pour $\mu < \Omega$.

Ceci établi, soit E un ensemble linéaire quelconque de première catégorie. En vertu de la définition de la suite (5), l'ensemble E est contenu dans un terme de cette suite. Soit $E \subset S_{\alpha_\gamma}$. D'après (6) et (3) on a évidemment $S_{\alpha_\gamma} = \sum_{\mu \leqslant \gamma} Q_\mu$, d'où $E \subset \sum_{\mu \leqslant \gamma} Q_\mu$ et par conséquent

$$f(E) \subset f(\sum_{\mu \leqslant \gamma} Q_\mu) = \sum_{\mu \leqslant \gamma} f(Q_\mu) = \sum_{\mu \leqslant \gamma} R_\mu = T_{\beta_\gamma},$$

puisque $T_{\beta_\gamma} = \sum_{\mu \leqslant \gamma} R_\mu$ d'après (10) et (7). On a donc $f(E) \subset T_{\beta_\gamma}$ et comme $\beta_\gamma < \Omega$, l'ensemble T_{β_γ} est en vertu de (7) la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle. Il en résulte aussitôt que l'ensemble $f(E)$ est de mesure nulle.

Soit, réciproquement, E un ensemble linéaire de mesure nulle. En vertu de la définition de la suite (9) l'ensemble E est contenu dans un terme de cette suite. Soit $E = T_{\beta_\lambda}$. Comme $T_{\beta_\lambda} = \sum_{\mu \leqslant \lambda} R_\mu$, il vient $E \subset \sum_{\mu \leqslant \lambda} R_\mu$, ce qui donne

$$f^{-1}(E) \subset f^{-1}(\sum_{\mu \leqslant \lambda} R_\mu) = \sum_{\mu \leqslant \lambda} f^{-1}(R_\mu) = \sum_{\mu \leqslant \lambda} Q_\mu = S_{\alpha_\lambda},$$

d'où $f^{-1}(E) \subset S_{\alpha_\lambda}$. Comme $\alpha_\lambda < \Omega$, l'ensemble S_{α_λ} est en vertu de (3) la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie. L'ensemble $f^{-1}(E)$ est donc à plus forte raison de première catégorie.

L'implication $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{C}_{25}$ est ainsi établie.

Appelons avec M. E. Szpilrajn *semblables* deux familles d'ensembles Φ_1 et Φ_2, s'il existe une correspondance biunivoque φ entre Φ_1 et Φ_2 et une correspondance biunivoque f entre la somme S_1 de tous les ensembles de la famille Φ_1 et la somme S_2 de tous ceux de Φ_2, telles que l'on ait

$$\varphi(E) = f(E) \qquad \textit{pour tout} \quad E \in \Phi_1 \text{ [1]}.$$

On connait peu d'exemples de familles d'ensembles de points qui soient semblables. Telles sont p. ex. la famille de tous les ensembles mesurables *linéaires* et celle de tous les ensembles mesurables (superficiellement) *plans*.

Or, la proposition C_{25} peut s'exprimer comme il suit:

Proposition $C_{25}a$. *La famille de tous les ensembles linéaires de première catégorie et celle de tous les ensembles linéaires de mesure nulle sont semblables.*

Soient maintenant $f(x)$ une transformation qui satisfait à la proposition C_{25} et N_1 un ensemble satisfaisant à la proposition C_1. Considérons un ensemble linéaire quelconque E de mesure nulle. L'ensemble $f^{-1}(E)$ est donc de première catégorie et par suite l'ensemble $N_1 \cdot f^{-1}(E)$ est au plus dénombrable, de même que son image $f(N_1 \cdot f^{-1}(E)) = f(N_1) \cdot f(f^{-1}(E)) = f(N_1) \cdot E$. Or, la transformation $f(x)$ étant biunivoque et l'ensemble N_1 étant de puissance du continu, l'ensemble $N = f(N_1)$ est aussi de puissance du continu.

Nous avons ainsi déduit de la proposition C_1 (moyennant la proposition C_{25}) la conséquence suivante, qui correspond par dualité à C_1:

Proposition C_{26} [2]). *Il existe un ensemble linéaire N de puissance du continu qui a un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble linéaire de mesure nulle.*

La proposition C_{26} constitue d'ailleurs une partie de la proposition P_9a, p. 31.

---

[1]) Cf. A. N. Whitehead et B. Russel, *Principia Mathematica* II,* 111.

[2]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* V, p. 184.

Il est à remarquer qu'on établit sans faire appel à l'hypothèse H l'existence d'un ensemble linéaire non dénombrable N ayant avec tout ensemble de mesure nulle un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$ de points communs.

En effet, si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, cela résulte immédiatement de la proposition C_{26} et si $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, il suffit de prendre pour N un ensemble quelconque de puissance $\aleph_1$.

Notons que la proposition suivante sur les ensembles plans, analogue à C_{26}, peut être déduite de l'hypothèse H par l'intermédiaire des propositions tout à fait analogues à C_1 et C_{26}, mais concernant les ensembles *plans* au lieu des ensembles *linéaires* (la marche des démonstrations restant la même):

Proposition $C_{26}a$. *Il existe un ensemble plan N de puissance du continu dont tout sous-ensemble indénombrable est non mesurable superficiellement* (au sens de Lebesgue).

§ 2. Propriété S. Dualité entre L et S. Conséquences $C_{27} - C_{40}$.

Nous dirons qu'un ensemble linéaire jouit de la propriété **S**, s'il n'admet avec tout ensemble linéaire de mesure nulle qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs. La propriété **S** correspond donc par dualité à la propriété **L** (Chap. II, § 2, p. 37) et la proposition C_{26} revient à affirmer l'existence d'un ensemble linéaire de puissance du continu jouissant de la propriété **S**.

Commençons par donner des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence (dans un ensemble linéaire) de sous-ensembles jouissant de la propriété **L** et de la propriété **S** respectivement. Nous allons les déduire de la proposition P_8. Les deux propositions suivantes, où ces conditions sont formulées, se correspondent donc mutuellement par dualité.

Proposition C_{27}. *Pour qu'un ensemble linéaire E contienne un sous-ensemble indénombrable N jouissant de la propriété* **L**, *il faut et il suffit qu'il soit de deuxième catégorie de Baire.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, si E est un ensemble de première catégorie et N un ensem-

ble jouissant de la propriété **L**, l'ensemble EN est au plus dénombrable, car tout ensemble de première catégorie est contenu dans la somme d'une série infinie d'ensembles parfaits non-denses. Par conséquent, si N est indénombrable, E ne peut pas contenir N.

La condition est suffisante. Soient E un ensemble linéaire de deuxième catégorie et Φ la famille de tous les ensembles qui sont des produits (parties communes) de E avec des ensembles parfaits non-denses. Evidemment $\overline{\overline{\Phi}} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

Comme ensemble de deuxième catégorie, E n'est pas une somme de $\aleph_0$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable. D'après la proposition $\boldsymbol{P}_8$, p. 25, il existe donc un sous-ensemble non dénombrable N de E ayant avec tout ensemble de la famille Φ un ensemble au plus dénombrable de points communs. Donc, P étant un ensemble parfait non-dense quelconque, l'ensemble $N \cdot EP = N \cdot P$ est au plus dénombrable, de sorte que l'ensemble N jouit de la propriété **L**.

Proposition C_{28}. *Pour qu'un ensemble linéaire contienne un sous-ensemble indénombrable N jouissant de la propriété* **S**, *il faut et il suffit qu'il soit de mesure extérieure positive.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, d'après la définition de la propriété **S**, un ensemble indénombrable jouissant de cette propriété ne peut être de mesure nulle, donc à plus forte raison contenu dans un ensemble de mesure nulle.

La condition est suffisante. Soient E un ensemble linéaire de mesure extérieure positive et Φ la famille de tous ses produits avec des ensembles G_δ linéaires de mesure nulle. Il est évident que l'on a $\overline{\overline{\Phi}} \leqslant 2^{\aleph_0}$. Comme ensemble de mesure extérieure positive, E n'est pas une somme de $\aleph_0$ ensembles de la famille Φ et d'un ensemble au plus dénombrable. D'après la proposition $\boldsymbol{P}_8$, il existe donc un sous-ensemble indénombrable N de E qui admet un ensemble au plus dénombrable de points communs avec tout ensemble de la famille Φ.

Or, tout ensemble de mesure nulle est contenu dans un G_δ de mesure nulle.

Par conséquent, Q étant un ensemble linéaire quelconque de mesure nulle, l'ensemble $N \cdot EQ = NQ$ est au plus dénombrable. L'ensemble N jouit donc de la propriété **S**.

Les implications $\boldsymbol{P}_8 \to \boldsymbol{C}_{27}$ et $\boldsymbol{P}_8 \to \boldsymbol{C}_{28}$ sont ainsi établies.

Nous démontrerons à présent, sans avoir recours à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, quelques théorèmes sur les ensembles jouissant de la propriété **S** et nous en tirerons ensuite plusieurs conséquences moyennant la proposition $\boldsymbol{C}_{26}$.

Lemme 1. *Si $f(x)$ est une fonction mesurable (d'une variable réelle), il existe pour tout nombre x_0 réel donné et tout $\varepsilon > 0$ un nombre $\delta > 0$ tel que*

$$\text{(11)} \qquad \text{mes} \underset{x}{E} [0 < |f(x) - f(x_0)| < \delta] < \varepsilon.$$

Démonstration. Posons, pour $n = 1, 2, 3, ...$

$$\text{(12)} \qquad M_n = \underset{x}{E} \left[0 < |f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n} \right];$$

la fonction $f(x)$ étant mesurable, les ensembles (12) sont évidemment mesurables.

Or, on a d'après (12)

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset ... \quad et \quad M_1 M_2 M_3 ... = 0.$$

Les ensembles M_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ étant mesurables, il en résulte, comme on sait, que $\lim_{n=\infty} \text{mes}\, M_n = 0$ et par suite, pour n suffisamment grands, mes $M_n < \varepsilon$. En posant donc $\delta = {}^1/n$, nous aurons d'après (12) l'inégalité (11), c. q. f. d.

Lemme 2. *Si $f(x)$ est une fonction mesurable (d'une variable réelle), E un ensemble linéaire donné et P un ensemble parfait, il existe un ensemble N de mesure nulle contenu dans E et tel que l'ensemble $f(E) - f(N)$ est de première catégorie dans P.*

Démonstration. Il suffit évidemment de l'établir, en supposant que l'ensemble $f(E)$ est dense dans l'ensemble parfait P

Soit

$$y_1, y_2, y_3, \dots \tag{13}$$

un ensemble dénombrable de points de $f(E)$, dense dans P. Etant donnés deux nombres naturels n et k, il existe d'après le lemme 1 un nombre positif $\delta_{n,k}$ tel que l'ensemble

$$T_{n,k} = \underset{x}{E}\,[0 < |f(x) - y_k| < \delta_{n,k}] \tag{14}$$

(qui est évidemment mesurable) satisfait à l'inégalité

$$m(T_{n,k}) < \frac{1}{2^{n+k}}. \tag{15}$$

Posons

$$N = E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{n,k}. \tag{16}$$

Il vient d'après (15)

$$m\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(T_{n,k}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n},$$

donc d'après (6)

$$m_e(N) \leqslant m\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}\right) < \frac{1}{2^n} \qquad \textit{pour} \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

ce qui donne

$$m(N) = 0.$$

D'après (16) nous avons

$$f(E) - f(N) = f(E) - f\left(E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}\right). \tag{17}$$

Or, on a

$$f\left(E \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} T_{n,k}\right) \subset \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \underset{y}{E}\,[0 < |y - y_k| < \delta_{n,k}], \tag{18}$$

ce qu'on vérifie sans peine, en montrant à l'aide de (14) que tout élément du membre gauche de la relation (18) appartient à son membre droit.

Les formules (17) et (18) donnent

$$f(E) - f(N) \subset \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{C}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \underset{y}{E}\,[0 < |y - y_k| < \delta_{n,k}]\right). \tag{19}$$

Or, les ensembles

$$C\left(\sum_{k=1}^{\infty} \underset{y}{E}\,[0<|y-y_k|<\delta_{n,k}]\right) \quad où \quad n=1,2,3,\ldots$$

sont évidemment non-denses dans P, puisque les ensembles

$$\underset{y}{E}\,[0<|y-y_k|<\delta_{n,k}] \quad où \quad n=1,2,3,\ldots$$

sont ouverts et denses dans P (l'ensemble (13) étant dense dans P).

L'ensemble (19) est donc de première catégorie dans P, c. q. f. d.

Théorème 1. *Toute fonction mesurable d'une variable réelle transforme les ensembles jouissant de la propriété* **S** *en ensembles toujours de première catégorie* [1]).

D é m o n s t r a t i o n. Soient E un ensemble jouissant de la propriété **S**, $f(x)$ une fonction mesurable d'une variable réelle et P un ensemble linéaire parfait. D'après le lemme 2, il existe un sous-ensemble N de E de mesure nulle et tel que l'ensemble $f(E)-f(N)$ est de première catégorie dans P. Or, l'ensemble E jouissant de la propriété **S**, l'ensemble N (en tant que de mesure nulle et contenu dans E) est au plus dénombrable. Par conséquent l'ensemble $f(E)=f(N)+[f(E)-f(N)]$, en tant que somme de deux ensembles de première catégorie dans P, est de première catégorie dans P, c. q. f. d.

A l'aide de l'hypothèse ***H*** on démontre la proposition suivante, réciproque du théorème 1:

Proposition C_{29}. *Si toute fonction mesurable d'une variable réelle transforme un ensemble linéaire donné E en ensemble de première catégorie, l'ensemble E jouit de la propriété* **S**.

D é m o n s t r a t i o n. Soit E un ensemble linéaire qui ne jouit pas de la propriété **S**: il existe alors un ensemble linéaire N de mesure nulle et tel que l'ensemble EN est non dénombrable, donc en vertu de l'hypothèse ***H*** de puissance $2^{\aleph_0}$. Il existe par consé-

[1]) Voir ma Note du 21 Février 1929 dans *C. R. Soc. Sc. Varsovie*, XXII, p. 58.

quent une fonction $f(x)$ définie sur EN, dont l'ensemble des valeurs pour $x \in EN$ est l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels. Posons encore $f(x) = 0$ pour x *non*-$\in EN$. La fonction $f(x)$ ainsi complétée pour tous les $x \in \mathcal{E}$ est évidemment mesurable, l'ensemble $\underset{x}{E}[f(x) \neq 0] = EN \subset N$ étant de mesure nulle, et elle transforme l'ensemble E en ensemble $\mathcal{E}$, puisque $f(E) \supset f(EN) = \mathcal{E}$, donc en ensemble de deuxième catégorie.

L'implication $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{C}_{29}$ est ainsi établie.

La proposition $\boldsymbol{C}_{26}$ entraîne en vertu du théorème 1 la proposition suivante (qui peut être regardée comme correspondant par dualité à la proposition $\boldsymbol{C}_2$, Chap. II, p. 49):

Proposition $\boldsymbol{C}_{30}$. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu que toute fonction mesurable d'une variable réelle transforme en ensemble toujours de première catégorie.*

La proposition $\boldsymbol{C}_{30}$ implique en particulier cette

Proposition $\boldsymbol{C}_{31}$. *Il existe un ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ dont toute image continue est un ensemble toujours de premiére catégorie* [1]).

Il est à remarquer, en rapprochant la proposition $\boldsymbol{C}_{31}$ à la proposition $\boldsymbol{C}_3$, que nous ne savons pas s'il existe un ensemble linéaire indénombrable dont toute image *continue* soit à la fois de mesure nulle et toujours de première catégorie.

Or, on peut démontrer, même sans addmettre l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, qu'il existe un ensemble linéaire indénombrable dont toute image *homéomorphe* est de mesure nulle et toujours de première catégorie [2]) et même tel que toute *homéomorphie généralisée* au sens de M. Kuratowski [3]) (homéomorphie de classe α, β où $\alpha < \Omega$

---

[1]) Voir ma Note dans le *Bull. Acad. Polonaise* 1928, p. 455.

[2]) Voir N. Lusin et W. Sierpiński, *Rend. Accad. Lincei*, vol. VIII, ser. 6, p. 214—215 et W. Sierpiński, *Fund. Math.* VII, p. 188. Un autre exemple: W. Sierpiński, *Fund. Math.* XX, p. 33 et *Publ. Univ. Belgrade*, 1934.

[3]) C. Kuratowski, *Topologie I*, p. 221; voir aussi ma Note dans *Fund. Math.* XXII (à paraître).

et $\beta < \Omega$) le transforme en un ensemble qui est à la fois de mesure nulle et toujours de première catégorie.

Théorème 2. *Chaque ensemble linéaire indénombrable qui jouit de la propriété* **S** *est non mesurable.*

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire non dénombrable et jouissant de la propriété **S**. Par conséquent il n'est pas de mesure nulle. Or, E n'est non plus un ensemble mesurable de mesure positive, puisqu'un tel ensemble contient, comme on sait, un sous-ensemble parfait (donc indénombrable) de mesure nulle. L'ensemble E est donc non mesurable (au sens de M. Lebesgue), c. q. f. d.

La propriété **S** étant héréditaire, le théorème 2 donne le suivant

Corollaire. *Tout sous-ensemble indénombrable d'un ensemble jouissant de la propriété* **S** *est non mesurable.*

On voit sans peine que *la condition de ce corollaire est non seulement nécessaire, mais aussi suffisante pour qu'un ensemble jouisse de la propriété* **S**.

En effet, si tout sous-ensemble indénombrable d'un ensemble linéaire E est non mesurable, aucun ensemble de mesure nulle ne peut contenir une infinité indénombrable de points de E, car ces derniers formeraient alors un sous-ensemble indénombrable et cependant mesurable de E.

La proposition C_{26} entraîne en vertu de ce corollaire la conséquence suivante (correspondant par dualité à la proposition C_6, p. 51):

Proposition C_{32}. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu dont tout sous-ensemble indénombrable est non mesurable.*

Il est à remarquer qu'on établit sans admettre l'hypothèse H l'existence d'un ensemble linéaire de puissance du continu dont tout sous-ensemble indénombrable est non mesurable (B). Tel est p. ex. chaque ensemble de puissance du continu qui est *totalement imparfait,* c. à d. qui ne contient aucun ensemble parfait.

Soit E un ensemble satisfaisant à la proposition C_{32}. L'ensemble E étant de puissance du continu, il existe une correspondance biunivoque entre les nombres $x \in \mathcal{E}$ et les éléments $y \in E$. Autrement dit, il existe une fonction $f(x)$ d'une variable réelle, à valeurs distinctes, et dont l'ensemble de valeurs $f(\mathcal{E})$ coïncide avec E.

Vu la propriété de l'ensemble E, on prouve sans peine que la fonction $f(x)$ transforme tout ensemble indénombrable de nombres réels en ensemble non mesurable, puisque, en tant qu'une fonction à valeurs distinctes, elle transforme tout ensemble linéaire indénombrable en sous-ensemble indénombrable de E. On est ainsi conduit à la conséquence suivante:

Proposition C_{33}. *Il existe une fonction d'une variable réelle qui transforme tous les ensembles linéaires indénombrables en ensembles non mesurables.*

D'une façon analogue, la proposition C_6 conduit à la proposition suivante, qui correspond par dualité à C_{33}:

Proposition C_{34}. *Il existe une fonction d'une variable réelle qui transforme tous les ensembles linéaires indénombrables en ensembles de deuxième catégorie.*

Notons encore au sujet des propositions C_6 et C_{32} que le théorème suivant peut être démontré sans l'hypothèse H:

Il n'existe aucun ensemble linéaire indénombrable dont tout sous-ensemble indénombrable soit simultanément non mesurable et de deuxième catégorie.

Soit, en effet, E un ensemble linéaire dont tout sous-ensemble indénombrable est non mesurable. C'est caractéristique, comme nous avons vu plus haut, pour les ensembles jouissant de la propriété **S**. L'ensemble E jouit donc de la propriété **S**. En vertu du théorème 1 (appliqué à la fonction $f(x) = x$), il constitue donc un ensemble toujours de première catégorie. Par conséquent tous les sous-ensembles de E sont de première catégorie.

En s'appuyant sur les propositions C_1 et C_{26}, on en déduit la conséquence qui suit:

Proposition C_{35}. *Il existe deux ensembles linéaires de puissance du continu dont aucun ne peut être transformé dans l'autre par une fonction de Baire d'une variable réelle.*

Soient à ce but N un ensemble satisfaisant à la proposition C_1 et E un ensemble vérifiant la proposition C_{26}. L'ensemble N jouit donc de la propriété **L** et l'ensemble E de le propriété **S**. Etant donnée une fonction de Baire $f(x)$ définie dans l'ensemble $\mathcal{E}$ des tous les nombres réels, l'ensemble $f(N)$ jouit en vertu du théorème 1, Chap. II, p. 39 de la propriété **C** et par suite il est de mesure nulle. Cependant l'ensemble E, en tant qu'un ensemble à propriété **S**, est en vertu du théorème 2, p. 87, non mesurable. Par conséquent $f(N) \neq E$.

Réciproquement, la propriété **S** de E implique selon le théorème 1, p. 85, que l'ensemble E est toujours de première catégorie, tandis que l'ensemble N, comme ayant la propriété **L**, est de deuxième catégorie en vertu du corollaire 2, p. 42. Par conséquent $f(E) \neq N$.

Nous ne connaissons aucune démonstration de la proposition C_{35} qui ne fasse appel ni à l'hypothèse H ni aux conséquences de cette hypothèse.

La proposition C_{26} entraîne en vertu des théorèmes 1 et 2 de ce chapitre (en tenant compte de la définition de la propriété **S**) la

Proposition C_{36}. *Il existe un ensemble qui est à la fois non mesurable et toujours de première catégorie.*

Comme chaque ensemble qui est toujours de première catégorie jouit évidemment de la propriété de Baire, on tire de C_{36} cette

Proposition C_{37}. *Il existe un ensemble non mesurable jouissant de la propriété de Baire.*

Cette proposition a été déduite de l'hypothèse H (par une autre voie) par M. N. Lusin [1]. Notre démonstration est basée sur une idée de M. S. Saks [2].

Lemme 3. *Etant donnés un ensemble linéaire E jouissant de la propriété* **S** *et un ensemble mesurable M, l'ensemble ME est à la fois un F_σ relativement à E et un G_δ relativement à E.*

Démonstration. M étant un ensemble mesurable, nous pouvons poser $M = Q + N$, où Q est un F_σ et N un ensemble de mesure nulle. On a donc $ME = QE + NE$. L'ensemble E jouissant de la propriété **S**, l'ensemble $D = NE$ est au plus dénombrable. On a donc $ME = (Q + D) E$, où $Q + D$ est un F_σ. Comme produit de E avec un F_σ, l'ensemble ME est un F_σ relativement à E.

D'une façon analogue, le complémentaire CM de M étant mesurable, on trouve $E \cdot CM = E \cdot T$, où T est un F_σ et par conséquent CT est un G_δ. Or, il vient aussitôt $EM = E \cdot CT$, de sorte que l'ensemble EM est un produit de E avec un G_δ, c. à d. un G_δ relativement à E, ce qui achève la démonstration.

Il est à remarquer que si E est un ensemble de puissance du continu, il existe des sous-ensembles de E qui ne sont pas des F_σ relativement à E, car la puissance de la famille de tous les F_σ n'est, comme on sait, que $2^{\aleph_0}$, tandis que celle de la famille de tous les sous-ensembles de E est $2^{2^{\aleph_0}}$.

Or, la question s'impose: *existe-t-il un ensemble linéaire non dénombrable, dont tous les sous-ensembles soient des F_σ relativement à lui?*

La réponse est évidemment *négative,* si l'on admet l'hypothèse H.

Parmi d'autres problèmes appartenant à cet ordre d'idées, signalons le suivant: soit Φ une famille *dénombrable* quelconque de sous-ensembles d'un ensemble donné E de puissance $\aleph_1$. On établit facilement sans recourir à l'hypothèse H l'existence d'un

---

[1]) *Fund. Math.* IX, p. 116—118.

[2]) *Fund. Math.* XI, p. 277.

sous-ensemble de E qui n'est ni somme, ni produit d'aucune suite (finie ou infinie) d'ensembles appartenant à la famille Φ.

Or, *existe-t-il un sous-ensemble de E qui ne soit pas un ensemble limite complet* (au sens de M. E. Borel) *d'une suite d'ensembles appartenant à* Φ [1])?

Ce problème a été posé par M. F. Hausdorff. Nous ne savons le résoudre qu'en admettant l'hypothèse ***H***; la réponse est alors positive.

Le lemme 3 entraîne en vertu des théorèmes bien connus sur les relations entre la classe de Baire d'une fonction $f(x)$ et celle des ensembles

$$\underset{x}{E}[f(x) > a] \quad et \quad \underset{x}{E}[f(x) < a] \text{ }^{2})$$

le théorème suivant:

Théorème 3. *Si E est un ensemble linéaire jouissant de la propriété* **S**, *toute fonction de Baire définie sur E est de classe* $\leqslant 1$ *(sur E)* [3]).

La proposition C_{26} entraîne aussitôt en vertu de ce théorème la proposition suivante (comp. la proposition C_7, Chap. II, p. 52 et renvoi [1])):

Proposition C_{38}. *Il y a des ensembles indénombrables (de nombres réels) sur lesquels il n'existe aucune fonction de classe 2.*

Or, il existe sur tout ensemble indénombrable (et, plus généralement, sur tout ensemble non isolé) des fonctions de classes 0 et 1. Cependant, sans admettre l'hypothèse ***H*** ou du moins l'hypothèse que $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$, on ne sait pas répondre à la question suivante: *existe-t-il sur chaque ensemble indénombrable de nombres*

---

[1]) c. à d. qui ne soit de la forme $\lim\limits_{n} E_n$ où $E_n \varepsilon \Phi$. Voir *Fund. Math.* XX, p. 286, problème 58.

[2]) Voir p. ex. H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 349 (Satz I) et p. 351 (Satz IV).

[3]) E. Szpilrajn, *Fund. Math.* XV, p. 212.

réels une fonction qui ne soit pas une fonction de Baire (sur cet ensemble)?

Les ensembles jouissant de la propriété **S** ont été l'objet d'une étude spéciale de la part de M. Szpilrajn [1]). Nous y empruntons deux propositions suivantes, qu'il a déduites de l'hypothèse ***H***. Nous allons les déduire des conséquences C_{26} et C_{26a} de C_1.

Proposition C_{39}. *Il existe un ensemble plan de mesure linéaire infinie, dont chaque sous-ensemble est mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans* [2]).

Démonstration. Soit N un ensemble de puissance du continu satisfaisant à la proposition $C_{26}a$, c. à d. dont tous les sous-ensembles indénombrables sont non mesurables superficiellement (au sens de Lebesgue). Chaque sous-ensemble dénombrable de N est évidemment de mesure linéaire nulle et chaque sous-ensemble indénombrable de N, en particulier N lui-même, est de mesure linéaire extérieure infinie, car tout ensemble de mesure linéaire extérieure finie est, comme on sait, de mesure superficielle nulle [3]). Ainsi N est un ensemble plan de mesure linéaire extérieure infinie et dont chaque sous-ensemble est de mesure linéaire extérieure infinie ou nulle.

Reste à montrer que tout sous-ensemble Q de N est mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans.

Soit, en effet, Z un ensemble plan arbitraire. L'égalité

$$\mu(Z) = \mu(Z\,Q) + \mu(Z - Q)$$

(où μ désigne la mesure linéaire extérieure) est évidemment satisfaite, car on a soit $\mu(Z\,Q) = 0$, soit $\mu(Z\,Q) = +\infty$. Vu la définition de la mesurabilité linéaire des ensembles plans, il en résulte

---

[1]) E. Szpilrajn, *Sur un ensemble non mesurable de M. Sierpiński*, C. R. Soc. Sc. Varsovie, XXIV (1931), p. 78—85.

[2]) Pour la mesure linéaire d'ensembles plans voir C. Carathéodory, *Gött. Nachr.* 1914, p. 420.

[3]) Voir p. ex. H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921, p. 461, théorème XI.

que l'ensemble Q est mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans.

On en déduit en particulier (pour $Q = N$) que l'ensemble N est mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans. La mesure linéaire extérieure de N étant, comme nous avons vu, infinie, N est donc de la mesure linéaire infinie. La proposition C_{39} se trouve ainsi établie.

Il est à remarquer que tout ensemble plan de mesure linéaire positive *finie* contient un sous-ensemble non mesurable en mesure linéaire d'ensembles plans [1]).

Lemme 4. *La somme d'un ensemble totalement imparfait et d'un ensemble toujours de première catégorie est un ensemble totalement imparfait.*

Démonstration. Soient Q un ensemble linéaire totalement imparfait et R un ensemble toujours de première catégorie. Considérons un ensemble linéaire parfait P et admettons que $P \subset Q + R$. Or, R étant un ensemble toujours de première catégorie, R est de première catégorie sur P et il existe un ensemble parfait $P_0 \subset P - R$. On a donc $P_0 \subset P$ et $P_0 R = 0$, de sorte que la formule $P \subset Q + R$ donne $P_0 \subset Q$, ce qui est impossible, l'ensemble Q étant totalement imparfait. $Q + R$ ne peut donc contenir aucun sous-ensemble parfait, c. q. f. d.

Proposition C_{40} [2]). *Il existe un ensemble linéaire de mesure extérieure positive et de deuxième catégorie, dont toute image continue linéaire est un ensemble totalement imparfait.*

Démonstration. Soient N un ensemble satisfaisant à la proposition C_1 et E un ensemble satisfaisant à la proposition C_{26}. On voit sans peine que toute image continue de N est totalement imparfaite. En effet, si une image continue $\varphi(N)$ de N contenait un ensemble parfait, on en pourrait déduire l'existence d'une trans-

---

[1]) Voir E. Szpilrajn, l. c., p. 80.

[2]) E. Szpilrajn, l. c., p. 83—85.

formation continue ψ de l'ensemble $\varphi(N)$ telle que l'ensemble $\psi(\varphi(N))$ soit un intervalle. La transformation $f(x) = \psi(\varphi(x))$ étant continue sur N, on serait en contradiction avec la propriété de l'ensemble N, dont toute image continue est de mesure nulle en vertu du théorème 1, p. 39.

Or, d'après le théorème 1, p. 85, toute image continue de l'ensemble E est un ensemble toujours de première catégorie. En vertu du lemme 4, toute image continue de l'ensemble $N + E$ (en tant que somme des images continues de N et de E) est donc un ensemble totalement imparfait. D'autre part, N est selon le corollaire 2, p. 42, de deuxième catégorie et l'ensemble E est selon le théorème 2, p. 87, non mesurable. Leur somme $N + E$ est donc un ensemble de deuxième catégorie et de mesure extérieure positive. Ainsi l'ensemble $N + E$ satisfait à la condition de la proposition C_{40}, c. q. f. d.

§ 3. Propriété λ. Conséquences $C_{41} - C_{46}$.

Nous dirons qu'un ensemble E jouit de la *propriété* λ, lorsque chaque sous-ensemble dénombrable de E est un G_δ relativement à E, c. à d. de la forme $E \cdot \Gamma$ où Γ est un G_δ.

Le lemme 3, p. 90 implique immédiatement que tout ensemble jouissant de la propriété **S** jouit également de la propriété λ. En vertu de la conséquence C_{26} de C_1 (cf. p. 80), la proposition suivante en résulte aussitôt:

Proposition C_{41}. *Il existe un ensemble linéaire de puissance du continu qui jouit de la propriété* λ.

Sans admettre l'hypothèse H on sait démontrer l'*existence des ensembles de puissance* $\aleph_1$ *pourvus de la propriété* λ [1]. On sait montrer aussi sans faire appel à l'hypothèse H que tout ensemble linéaire qui jouit de la propriété λ est un ensemble toujours de première catégorie [2].

---

[1]) W. Sierpiński, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV, p. 104.

[2]) Ibidem.

Or, soit $\{p_\xi\}$, où $\xi < \Omega$, une suite transfinie du type Ω formée de tous les points d'un ensemble E à propriété λ. Désignons pour tout $\alpha < \Omega$ par E_α l'ensemble de tous les points p_ξ où $\xi < \alpha$. Les ensembles E_α forment donc une suite transfinie croissante et ils sont des sous-ensembles au plus dénombrables de E et par conséquent à la fois des F_σ et G_δ relativement à E, puisque E jouit par hypothèse de la propriété λ. On voit ainsi que la proposition C_{41} entraîne cette

Proposition C_{42}. *Il existe un ensemble linéaire qui contient une suite transfinie de puissance du continu de sous-ensembles croissants qui sont à la fois des F_σ et des G_δ relativement à lui.*

Sans nous servir de l'hypothèse H, nous savons démontrer qu'il existe un ensemble linéaire E qui contient une suite transfinie du type Ω de sous-ensembles croissants qui sont à la fois des F_σ et des G_δ relativement à E. Cela prouve que le théorème de M. Z. Zalcwasser, d'après lequel toute suite bien ordonnée d'ensembles linéaires croissants qui sont à la fois des F_σ et des G_δ est au plus dénombrable [1]) ne se prête pas à une relativisation par rapport à un ensemble arbitraire E.

Lemme 5 [2]). *Si un espace métrique $\mathcal{Y}$ jouissant de la propriété λ est une image biunivoque et continue d'un espace métrique $\mathcal{X}$, ce dernier jouit également de la propriété λ.*

Démonstration. Soit D un sous-ensemble dénombrable de l'espace $\mathcal{X}$. En désignant par f la transformation en question de $\mathcal{X}$ en $\mathcal{Y}$, l'ensemble $f(D)$ (comme un ensemble dénombrable) est un G_δ dans $\mathcal{Y}$ (puisque $\mathcal{Y}$ jouit de la propriété λ) et par conséquent, la fonction f étant continue, l'ensemble $f^{-1}(f(D)) = D$ est un G_δ dans $\mathcal{X}$.

M. C. Kuratowski a posé le problème si tout ensemble linéaire qui est toujours de première catégorie jouit nécessaire-

---

1) *Fund. Math.* III, p. 44.

2) Cf. C. Kuratowski, *Fund. Math.* XXI, p. 128.

ment de la propriété λ. M. Lusin a démontré récemment que ce n'est pas le cas, si l'on admet la proposition C_1 [1]).

Soient en effet, K et E des ensembles satisfaisant à la conséquence C_{15} de C_1 (voir Chap. II, p. 68). Si l'ensemble K jouissait de la propriété λ, il en serait de même, d'après le lemme 5, de l'ensemble E. Pourtant c'est impossible, car tout ensemble qui jouit de la propriété **L** est de deuxième catégorie, tandis que tout ensemble qui jouit de la propriété λ est, comme nous avons déjà observé, de première catégorie [2]). Nous avons donc déduit de C_{15} cette

Proposition C_{43}. *Il existe un ensemble linéaire toujours de première catégorie qui ne jouit pas de la propriété λ.*

Lemme 6. *Etant donnée une fonction arbitraire $y=f(x)$ d'une variable réelle, définie dans un ensemble linéaire X jouissant de la propriété λ, l'image géométrique* [3]) *de cette fonction jouit de la propriété λ.*

Démonstration. Soit J l'image géométrique de la fonction $f(x)$. L'ensemble X est la projection (donc une image continue) biunivoque de J sur l'axe d'abscisses. Il en résulte en vertu du lemme 5 que J jouit de la propriété λ, l'ensemble X étant par définition un espace métrique pourvu de cette propriété.

Théorème 4. *Tout ensemble linéaire de puissance $\aleph_1$ est une projection biunivoque d'un ensemble plan jouissant de la propriété λ.*

Démonstration. Il existe, comme on sait, un ensemble linéaire X de puissance $\aleph_1$ jouissant de la propriété λ [4]). Plaçons-le sur l'axe d'abscisses et considérons un ensemble linéaire quelconque Y de puissance $\aleph_1$, situé sur l'axe d'ordonnées. On a donc $\overline{\overline{Y}}=\overline{\overline{X}}$ et il existe une correspondance biunivoque $y=f(x)$ entre les éléments x de X et les éléments y de Y. L'ensemble X jouis-

---

1) *Fund. Math.* XXI, p. 122.

2) cf. plus haut, p. 94, renvoi 1).

3) pour la définition de cette notion voir plus haut, p. 70.

4) voir plus haut, p. 94.

sant de la propriété λ, l'image géométrique J de la fonction $f(x)$ jouit également de la propriété λ en vertu du lemme 6. Or, l'ensemble $E = f(X)$ est évidemment une projection biunivoque (sur l'axe d'ordonnées) de l'ensemble J.

En admettant l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, nous pouvons déduire du théorème 4, qui vient d'être établi, la conséquence suivante, réciproque de la proposition C_{21}, Chap. II, p. 72:

Proposition C_{44}. *Il existe une fonction d'une variable réelle qui ne satisfait pas à la condition de Baire et dont l'image géométrique jouit de la propriété de Baire.*

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire quelconque qui ne jouit pas de la propriété de Baire. Il résulte de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ en vertu du théorème 4 que l'ensemble E est une projection biunivoque sur l'axe OX d'un ensemble plan J ayant la propriété λ et nous pouvons évidemment supposer que l'ensemble J est situé au-dessus de l'axe OX. Pareillement l'ensemble CE est une projection biunivoque sur l'axe OX d'un ensemble plan J' ayant la propriété λ et situé au-dessous de l'axe OX. L'ensemble plan $J + J'$, qui jouit de la propriété λ, donc à plus forte raison de la propriété de Baire, est évidemment l'image géométrique d'une fonction $f(x)$ de variable réelle. Or, la fonction $f(x)$ ne satisfait pas à la propriété de Baire, puisque l'ensemble $E = \underset{x}{E}\,[f(x) > 0]$ n'en jouit pas [1]. La proposition C_{44} est ainsi établie.

Les propositions C_{21} et C_{44} montrent que la propriété d'une fonction de satisfaire à la condition de Baire et la propriété de Baire de son image géométrique sont indépendantes l'une de l'autre.

Théorème 5. *Tout ensemble linéaire de puissance $\aleph_1$ est une image biunivoque et continue d'un ensemble linéaire jouissant de la propriété λ.*

---

[1]) Cf. plus haut, Chap. II, p. 38.

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire quelconque de puissance $\aleph_1$. D'après le théorème 4, E est une image biunivoque et continue d'un ensemble plan J jouissant de la propriété λ. Posons $E = f(J)$.

Or, comme on sait, le plan Π est une image biunivoque et continue de l'ensemble $\mathfrak{N}$ des nombres irrationnels: soit $\Pi = \varphi(\mathfrak{N})$ [1].

Posons $Q = \varphi^{-1}(J)$. L'ensemble $J = \varphi(Q)$ étant une image biunivoque et continue de Q et jouissant de la propriété λ, il résulte du lemme 5 que Q jouit de la propriété λ. Or, on a évidemment $E = f[\varphi(Q)]$ et la fonction $\psi(x) = f[\varphi(x)]$ est, comme on voit sans peine, biunivoque et continue dans Q. L'ensemble E est donc une image biunivoque et continue de l'ensemble linéaire Q, c. q. f. d.

Tout ensemble fini ou dénombrable étant évidemment pourvu de la propriété λ, l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ entraîne en vertu du théorème 5, qui précède, la

Proposition C_{45}. *Tout ensemble linéaire est une image biunivoque et continue d'un ensemble linéaire qui jouit de la propriété* λ [2].

De la proposition C_{45} résulte tout de suite cette

Proposition C_{46}. *La propriété de Baire des ensembles linéaires n'est pas invariante relativement aux transformations continues et biunivoques* [3].

Pour démontrer que $C_{45} \rightarrow C_{46}$, il suffit de remarquer que, d'une part, il existe des ensembles linéaires dépourvus de la propriété de Baire et, d'autre part, tout ensemble jouissant de la propriété λ est toujours de première catégorie et par suite jouit de la propriété de Baire.

Il est à noter qu'on peut même démontrer (en utilisant l'hypothèse $\boldsymbol{H}$) que *la propriété de Baire d'ensembles linéaires n'est pas invariante relativement aux transformations par des fonctions continues d'une variable réelle* [4].

---

[1] Voir p. ex. *Fund. Math.* XI, p. 117.

[2] Cf. C. Kuratowski, *Fund. Math.* XXI, p. 128.

[3] Cf. *Fund. Math.* IV, p. 323.

[4] Voir W. Sierpiński, *Mathematica*, VIII, Cluj 1934, p. 195.

§ 4. Conséquence C_{47} sur les types de dimensions de M. Fréchet.

Pour terminer, nous allons déduire à l'aide des propositions C_1 et C_{26} la conséquence suivante, qui constitue la solution d'un problème relatif à la notion de „type de dimensions de M. Fréchet“ [1]).

Proposition C_{47}. *Il existe deux ensembles indénombrables linéaires N_1 et N_2 tels qu'aucun ensemble linéaire non dénombrable E n'est d'un type de dimensions (au sens de M. Fréchet) qui soit à la fois plus petit que ceux de N_1 et de N_2.*

Démonstration. Soit N_1 un ensemble qui satisfait à la proposition C_1 et N_2 un ensemble qui satisfait à la proposition C_{26}.

Supposons qu'il existe un ensemble indénombrable E dont le type de dimensions de Fréchet est simultanément plus petit que ceux de N_1 et de N_2. L'ensemble E est donc homéomorphe à certains sous-ensembles indénombrables H_1 de N_1 et H_2 de N_2 respectivement. Or, les hypothèses admises sur N_1 et N_2 entraînent aussitôt que l'ensemble H_1 est de deuxième catégorie et que l'ensemble H_2 est de première catégorie sur tout ensemble parfait. Cependant c'est impossible, puisque les ensembles H_1 et H_2 sont homéomorphes, tous les deux étant homéomorphes à E.

Il est à remarquer que sans admettre l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ on peut démontrer qu'*il existe deux ensembles linéaires N_1 et N_2 de puissance $2^{\aleph_0}$ tels qu'aucun ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ n'ait le type de dimensions à la fois plus petit que ceux de E_1 et de E_2* [2]). Cependant nous ne savons pas démontrer sans l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ que celui des deux ensembles linéaires dont la puissance est supérieure a toujours le type de dimensions plus grand [3]).

---

[1]) Voir M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Paris 1928, p. 30, 31 et W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 69.

[2]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 65.

[3]) Cf. *Fund. Math.* XIV, p. 126.

CHAPITRE IV.

Autres conséquences de l'hypothèse du continu.

§ 1. Décompositions du plan. Conséquences C_{48} et C_{49} de P_1.

Proposition C_{48}. *Il existe une fonction de variable réelle $f(x)$ telle que le plan est une somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est superposable avec l'ensemble de tous les points de la courbe $y = f(x)$* [1].

Démonstration. La proposition P_1 implique immédiatement que l'ensemble Q de tous les points du carré ouvert $(0 < x < 1,\ 0 < y < 1)$ admet une décomposition $Q = A + B$ où A est un ensemble au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées et B est un ensemble au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses.

Soient A_1 l'ensemble obtenu de A par rotation de -90^0 autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$ et B_1 l'ensemble obtenu de B par rotation de $+90^0$ autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$. Soient H_1 l'ensemble de tous les points du plan $(x, 0)$ où $0 \leqslant x < 1$ est H_2 l'ensemble des points $(0, y)$ où $0 < y \leqslant 1$.

Posons:

$$M = A + B_1 + H_1 \qquad et \qquad N = B + A_1 + H_2.$$

---

[1] Le problème d'existence d'une telle fonction a été posé par M. N. Lusin; voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XXI, p. 39. Le terme *courbe* est entendu ici dans le sens défini au Chap. I, p. 11.

Les ensembles M et N sont, comme on voit sans peine, superposables: notamment N s'obtient de M par une rotation de -90^0 autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$.

On voit aussi sans peine que la somme $M+N$ contient tous les points du carré Q

$$0 \leqslant x < 1, \qquad 0 \leqslant y < 1.$$

Or, il résulte aussitôt des propriétés des ensembles A et B (et des définitions des ensembles B_1 et H_1) que l'ensemble M est non vide et au plus dénombrable sur chaque droite $x=a$ où $0 \leqslant a < 1$. Il en résulte de suite que l'ensemble M est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles $M_1+M_2+M_3+\ldots$ dont chacun a un et un seul point sur chaque droite $x=a$ où $0 \leqslant a < 1$.

Ceci établi, définissons la fonction d'une variable réelle $f(x)$ comme il suit.

Soit x_0 un nombre réel donné. Le nombre $a = x_0 - \mathrm{E}x_0$ (où $\mathrm{E}x_0$ désigne l'entier de x_0) satisfait évidemment à la condition $0 \leqslant a < 1$ et la droite $x=a$ rencontre chacun des ensembles M_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ en un et un seul point. Si $x_0 \geqslant 1$, posons $m = 2\,\mathrm{E}x_0$ et si $x_0 < 1$, posons $m = -2\,\mathrm{E}x_0 + 1$: ainsi le nombre m est toujours entier positif. Nous définirons $f(x_0)$ comme l'ordonnée du point (unique) en lequel la droite $x=a$ rencontre l'ensemble M_m.

La fonction $f(x)$ est ainsi définie pour tout x réel. Nous allons montrer que le plan P est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est superposable avec l'ensemble E de tous les points de la courbe $y=f(x)$.

Désignons à ce but par $E_{k,l}$ l'ensemble de tous les points (x, y) du plan tels que $(x-k,\ y-l)$ est un point de l'ensemble E et par $H_{k,l}$ l'ensemble qui s'obtient de $E_{k,l}$ par la rotation de -90^0 autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$. Les ensembles $E_{k,l}$ et $H_{k,l}$ pour k et l entiers sont évidemment tous superposables avec l'ensemble E.

Nous prouverons que

$$P = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (E_{k,l} + H_{k,l}). \tag{1}$$

Soit, en effet, (x_0, y_0) un point donné du plan P. Posons $a = x_0 - \mathrm{E}x_0$, $b = y_0 - \mathrm{E}y_0$: ce sont des nombres $\geqslant 0$ et < 1 et (a, b) est un point du carré $Q \subset M + N$. Le point (a, b) appartient donc a un au moins des ensembles M et N.

Si $(a, b) \in M$, il existe d'après $M = M_1 + M_2 + \ldots$ un indice n tel que $(a, b) \in M_n$. Or, d'après la propriété de l'ensemble M_n, (a, b) est le seul point en lequel la droite $x = a$ rencontre l'ensemble M_n et d'après la définition de la fonction $f(x)$ on a $f(a + q) = b$ pour $n = 2q$ et $f(a + q + 1) = b$ pour $n = 2q - 1$. D'après la définition des ensembles E et $E_{k,l}$ il en résulte que l'on a:

$$(x_0, y_0) \in E_{\mathrm{E}x_0 - q, \mathrm{E}y_0} \qquad \textit{pour } n = 2q$$

et

$$(x_0, y_0) \in E_{\mathrm{E}x_0 + q - 1, \mathrm{E}y_0} \qquad \textit{pour } n = 2q - 1,$$

de sorte que d'après (1) le point (x_0, y_0) appartient à la somme (1).

Si $(x_0, y_0) \in N$, le point (ξ_0, η_0) qui s'obtient du point (x_0, y_0) par la rotation de 90^0 autour du point $(^1/_2, {}^1/_2)$ appartient à l'ensemble M et, comme nous avons démontré tout à l'heure, il existe un terme $E_{k,l}$ de la somme (1) tel que $(\xi_0, \eta_0) \in E_{k,l}$. Il en résulte tout de suite (d'après la définition de l'ensemble $H_{k,l}$) que $(x_0, y_0) \in H_{k,l}$.

Le point (x_0, y_0) appartient donc toujours à la somme (1). L'implication $\boldsymbol{P}_1 \rightarrow \boldsymbol{C}_{48}$ est ainsi établie.

Il est à remarquer qu'en appliquant une décomposition de l'espace dont j'ai parlé dans ma communication parue aux *Comptes rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie* XXV (1932), p. 10—11, on pourrait démontrer sans peine que *si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe deux fonctions d'une variable réelle* $f_1(x)$ *et* $f_2(x)$ *telles que l'espace à 3 dimensions est une somme d'infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est superposable avec l'ensemble des points de la courbe gauche définie par les équations* $y = f_1(x)$ *et* $z = f_2(x)$.

Définissons maintenant à l'aide de la fonction $f(x)$ une nouvelle fonction $\varphi(x)$ d'une variable réelle comme il suit. Posons $\varphi(x) = f(x)$ pour $x < 1$. Si $x \geqslant 1$, $\mathrm{E}x$ est un nombre naturel que l'on peut écrire (d'une façon unique) sous la forme $\mathrm{E}x = 2^{p-1}(2q-1)$ où p et q sont des nombres naturels; nous poserons alors

$$\varphi(x) = f[(-1)^p q + x - \mathrm{E}x].$$

On voit sans peine que l'ensemble de tous les points de la courbe $y = \varphi(x)$ peut être décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles disjoints (correspondant aux intervalles $k \leqslant x < k+1$ où k est un entier) et dont on peut former, par une translation convenable de chacun de ces ensembles, une infinité dénombrable de courbes congruentes avec la courbe $y = f(x)$. On en déduit aussitôt, en vertu de la propriété de la fonction $f(x)$, la proposition suivante:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe une fonction d'une variable réelle* $\varphi(x)$ *telle que la courbe* $y = \varphi(x)$ *peut être divisée en une infinité dénombrable d'„arcs"* (correspondant aux intervalles $k \leqslant x < k+1$ où $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), *dont on peut, en les déplaçant convenablement* (par translations et rotations), *couvrir tout le plan.*

Il est à remarquer que, comme l'a démontré M. Mazurkiewicz [1]), les mots „d'une infinité dénombrable" dans l'énoncé de la proposition C_{48} ne peuvent pas être remplacés par les mots „d'un nombre fini", le plan n'étant pas une somme d'un nombre fini de courbes.

Une autre conséquence immédiate de la proposition P_1 est la

Proposition C_{49}. *Il existe un ensemble plan E tel que toute droite parallèle à l'axe d'ordonnées rencontre l'ensemble E dans un ensemble linéaire de points de mesure nulle et toute droite parallèle à l'axe d'abscisses rencontre le complémentaire de E dans un ensemble linéaire de mesure nulle* [2]).

Nous ne savons pas démontrer la proposition C_{49} sans faire intervenir l'hypothèse H [3]). Or, il est à remarquer que sans l'hypothèse H (mais en faisant appel au théorème de M. Zermelo) nous savons démontrer qu'il existe un ensemble plan que toute

---

[1]) S. Mazurkiewicz, *Fund. Math.* XXI, p. 43.

[2]) Le problème d'existence d'un tel ensemble E a été posé par M. H. Steinhaus.

[3]) En vertu du lemme p. 9, il suffit d'ailleurs, pour démontrer la proposition C_{49}, d'employer l'hypothèse suivant laquelle tout ensemble (linéaire) de puissance $< 2^{\aleph_0}$ est de mesure nulle.

droite parallèle à l'axe d'ordonnées rencontre dans un seul point et toute droite parallèle à l'axe d'abscisses rencontre dans un ensemble (linéaire) de points non mesurable au sens de Lebesgue [1]).

§ 2. Conséquences $C_{50}-C_{52}$ de P_4 (P_4a).

Proposition C_{50}. *Il existe une suite infinie de fonctions d'une variable réelle $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ qui ne prennent que deux valeurs* 0 *et* 1 *et qui sont telles que, quelle que soit la suite infinie croissante d'indices $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$, la suite infinie $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), f_{m_3}(x), \ldots$ n'est convergente que pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x* [2]).

Démonstration. Admettons la proposition P_4 et soit $\{A_x^i\}$ le système d'ensembles vérifiant les conditions 1), 2) et 3) de P_4. Posons pour i naturels et x réels

(1) $$f_i(x) = 1 \qquad pour \quad x \in A_0^i$$

et

(2) $$f_i(x) = 0 \qquad pour \quad x \in \mathcal{E} - A_0^i.$$

Nous allons montrer que la suite $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$) satisfait à la proposition C_{50}.

Soit à ce but $m_1, m_2, m_3, \ldots$ une suite infinie croissante quelconque d'indices. Posons

(3) $$D = \sum_{p=1}^{\infty}\left(\mathcal{E} - \sum_{i=p}^{\infty} A_0^{m_i}\right) + \sum_{p=1}^{\infty}\left(\mathcal{E} - \sum_{i=p}^{\infty} A_1^{m_i}\right).$$

Le système d'ensembles A_x^i satisfait par hypothèse à la condition 3) de P_4, qui équivaut, comme nous savons, à la condition 3''), p. 18. Or, la condition 3'') implique tout de suite que l'ensemble (3) est au plus dénombrable.

---

[1]) Cf. ma Note du 24 Février 1919 dans le *Bull. Acad. Cracovie.*

[2]) C'est la solution négative d'un problème posé par M. S. Saks; voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XVIII, p. 110 et *Bull. Acad. Serbe* A., 1932, p. 73. Cf. la proposition C_{13}, Chap. II, p. 62.

Soit maintenant x un nombre de l'ensemble $\mathcal{E} - D$. On a donc selon (3):

$$x \in \sum_{i=p}^{\infty} A_0^{m_i} \quad et \quad x \in \sum_{i=p}^{\infty} A_1^{m_i} \qquad pour \quad p = 1, 2, 3, \ldots$$

Il existe par conséquent une infinité d'indices différents i tels que $x \in A_0^{m_i}$, donc d'après (1) que $f_{m_i}(x) = 1$, et une infinité d'indices différents m_i tels que $x \in A_1^{m_i}$, donc d'après (2) et d'après la propriété 2) de P_4 tels que $f_{m_i}(x) = 0$. La suite infinie des fonctions $f_{m_1}(x), f_{m_2}(x), f_{m_3}(x), \ldots$ diverge donc pour tout $x \in \mathcal{E} - D$. Les valeurs de x pour lesquelles cette suite est convergente appartiennent donc à D et forment par suite un ensemble au plus dénombrable.

L'implication $P_4 \to C_{50}$ est ainsi démontrée.

Il est à remarquer que, d'après un théorème de M. S. Mazurkiewicz [1]), il n'existe aucune suite infinie de fonctions *mesurables* $f_1(x), f_2(x), \ldots$ vérifiant la proposition C_{50}.

La proposition C_{50} équivaut, comme on démontre sans peine (sans utiliser l'hypothèse H), à la proposition C_{51} suivante:

Proposition C_{51}. *Il existe deux suites infinies d'ensembles $\{E_i\}$ et $\{H_i\}$ telles que*

1) $\mathcal{E} = E_i + H_i$ *pour tout* $i = 1, 2, 3, \ldots$,

2) $E_i H_i = 0$ *pour* $i = 1, 2, 3, \ldots$,

3) *N étant un ensemble indénombrable quelconque de nombres réels, il existe un nombre naturel p tel que l'on a*

$$NE_i \neq 0 \quad et \quad NH_i \neq 0 \qquad pour\ tout\ i > p.$$

Démonstration. L'implication $C_{51} \to C_{50}$ se démontre tout à fait comme l'implication $P_4 \to C_{50}$ de tout à l'heure et pour démontrer l'implication $C_{50} \to C_{51}$ il suffit, comme on voit sans peine, de poser

$$E_i = \underset{x}{E}\,[f_i(x) = 0] \quad et \quad H_i = \underset{x}{E}\,[f_i(x) = 1] \qquad pour \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

---

[1]) Voir *Fund. Math.* XVIII, p. 114.

Proposition C_{52}. *Etant donnés un ensemble quelconque Q de nombres réels et une famille arbitraire Φ de sous-ensembles de Q assujettie à la condition:*

(Δ) *toute famille de sous-ensembles disjoints (non vides) de Q qui appartiennent à Φ est au plus dénombrable,*

il existe toujours une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ de sous-ensembles de Q n'appartenant pas à Φ et tels que l'ensemble $Q - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est au plus dénombrable [1].

Démonstration. Admettons la proposition P_{4a} et soit $\{A_x^i\}$ un système d'ensembles satisfaisant aux conditions 1), 2) et 3^a) de cette proposition. Imaginons tous les sous-ensembles de Q partagés en deux familles Φ et Ψ de façon que la condition (Δ) soit réalisée pour Φ.

Nous allons montrer d'abord qu'il existe un nombre réel x tel que l'on ait pour tout i naturel:

$$(4) \qquad \text{soit } Q \cdot A_x^i = 0, \qquad \text{soit } Q \cdot A_x^i \in \Psi.$$

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait pour tout nombre x réel un indice naturel i_x tel que $Q \cdot A_x^{i_x} \neq 0$ et $Q \cdot A_x^{i_x} \in \Phi$. L'ensemble de tous les nombres réels étant indénombrable et celui de tous les indices naturels dénombrable, il existerait par conséquent un nombre naturel p tel qu'on aurait $i_x = p$ pour une infinité indénombrable de nombres réels x. On aurait donc $0 \neq Q \cdot A_x^p \in \Phi$ pour une infinité non dénombrable de nombres réels x, contrairement à la propriété (Δ) de la famille Φ et à la condition 2) de la proposition P_{4a}. L'existence d'un x réel donnant lieu à l'alternative (4) est ainsi établie.

---

[1]) Voir S. Ulam, *Fund. Math.* XVI, p. 145, théorème (*B*), où la proposition C_{52} est démontrée sans l'hypothèse *H* pour les ensembles Q de puissance $\aleph_1$. Voir aussi *Fund. Math.* XX, p. 214, où j'ai démontré la proposition C_{52} en me basant sur une hypothèse moins restrictive que l'hypothèse *H*; cf. S. Ulam, *Fund. Math.* XX, p. 221 et p. 223 (Bemerkung III).

Or, désignons par E_n le n-ième terme non vide de la suite infinie d'ensembles $Q \cdot A_x^1, Q \cdot A_x^2, Q \cdot A_x^3, \ldots$ En vertu de la condition 3^a) de la proposition P_{4a} cette suite infinie d'ensembles satisfait à la proposition C_{52}.

Il est ainsi démontré que $P_{4a} \to C_{52}$.

Il est à remarquer que dans la proposition C_{52} l'hypothèse d'après laquelle l'ensemble Q est formé de nombres réels, peut être remplacée évidemment par celle que Q soit un ensemble de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ formé d'éléments quelconques. D'ailleurs, la proposition C_{52} peut être démontrée sans faire appel à l'hypothèse H pour tous les ensembles Q de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, s'il n'existe aucun aleph *inaccessible* [1]) $\leqslant \mathfrak{m}$, donc en particulier, pour tous les ensembles Q de puissance $\aleph_\alpha$ où $\alpha \leqslant \Omega$ [2]).

§ 3. Mesure et catégorie. Conséquences $C_{53} - C_{57}$ de C_{52}.

Proposition C_{53}. *Etant donné un ensemble Q quelconque de nombres réels, il n'existe aucune fonction $m(E)$ qui fasse correspondre à chaque sous-ensemble E de Q un nombre réel (fini) $m(E)$ conformément aux conditions suivantes:*

1) *$m(E)$ ne s'annule pas identiquement pour tous les sous-ensembles E de Q,*

2) $m\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E_n)$, *quelle que soit la suite infinie $E_1, E_2, \ldots$ de sous-ensembles d i s j o i n t s de Q,*

3) *$m(E) = 0$ pour tout sous-ensemble E de Q composé d'un seul élément* [3]).

---

[1]) Voir pour la définition plus loin, Chap. V, p. 152.

[2]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XX, p. 214.

[3]) La proposition C_{53} constitue la solution négative du problème de la mesure *géneralisé*, considéré au Chap. II, § 12, p. 60 (dans sa forme affranchie de la restriction (i) du th. 5, p. 44). Cf. S. Banach et C. Kuratowski, *Fund. Math.* XIV, p. 129 et S. Ulam, *Fund. Math.* XVI, p. 145 — 146.

Démonstration. Admettons la proposition C_{52} et supposons qu'il existe une fonction $m(E)$ satisfaisant aux conditions 1)–3) de C_{53}. Soit M un sous-ensemble de Q tel que $m(M) \neq 0$. Un tel M existe en vertu de 1). Désignons par Φ la famille de tous les sous-ensembles E de Q tels que $m(EM) \neq 0$ et par Ψ celle de tous les autres sous-ensembles de Q.

Nous allons montrer au préalable que la famille Φ satisfait à la condition (Δ), p. 106.

Supposons qu'il n'en est pas ainsi et soit F une famille indénombrable de sous-ensembles disjoints de Q appartenant à Φ. Comme $F \subset \Phi$, on a donc $m(XM) \neq 0$ pour tout $X \in F$ et, la famille F étant indénombrable, le nombre $m(XM)$ a le même signe, p. ex. $m(XM) > 0$, pour une infinité indénombrable d'ensembles $X \in F$. Il existe par conséquent un $\eta > 0$ tel que l'inégalité $m(XM) > \eta$ se présente pour une infinité indénombrable, donc à plus forte raison pour certaine suite infinie $\{X_n\}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ d'ensembles $X \in F$. Les ensembles qui appartiennent à F étant par hypothèse disjoints deux à deux, on conclut de 2) qu'on a la relation $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n M\right) \geqslant \eta + \eta + ... = +\infty$, ce qui est impossible, puisque $\sum_{n=1}^{\infty} X_n M \subset M \subset Q$, d'où, selon 2), le nombre $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n M\right)$ est fini. La propriété (Δ) de Φ est ainsi établie.

En vertu de la proposition C_{52}, il existe donc dans Ψ une suite infinie d'ensembles $E_1, E_2, ..., E_n, ...$ tels que l'ensemble $Q - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est au plus dénombrable. Comme $M \subset Q$, il vient par conséquent $M = D + \sum_{n=1}^{\infty} E_n M$ où $\overline{\overline{D}} \leqslant \aleph_0$ et $D \cdot E_n M = 0$ pour $n = 1, 2, ...$ Selon les conditions 2) et 3), il en résulte que

$$(5) \qquad m(M) = m(D) + \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n M) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n M),$$

puisque ces conditions entraînent l'égalité $m(D) = 0$ pour tout D fini ou dénombrable. Or, comme $m(E_n M) = 0$ pour tout $n = 1, 2, ...$ (puisque $E_n \in \Psi$), la formule (5) donnerait d'après la condition 2)

l'égalité $m(M) = 0$, contrairement à l'hypothèse admise sur l'ensemble M.

L'implication $C_{52} \rightarrow C_{53}$ se trouve donc démontrée.

Il est à remarquer que dans la proposition C_{53} on peut, bien entendu, remplacer également l'ensemble Q de nombres réels par un ensemble d'éléments quelconques de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$.

Proposition C_{54}. *Tout ensemble linéaire de mesure extérieure positive contient une infinité indénombrable de sous-ensembles disjoints de mesure extérieure positive* [1].

Démonstration. Admettons la proposition C_{52} et supposons que la proposition C_{54} soit en défaut pour un ensemble linéaire Q, c. à d. que l'ensemble Q soit de mesure extérieure positive, tandis que chaque famille de sous-ensembles de Q disjoints deux à deux et ayant la mesure extérieure positive est au plus dénombrable. Désignons par Φ la famille de tous les sous-ensembles de Q qui sont de mesure extérieure positive et par Ψ la famille de tous les autres sous-ensembles de Q. Chaque famille d'ensembles disjoints et qui appartiennent à Φ est par conséquent au plus dénombrable. D'après C_{52} on obtient facilement $Q = D + \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, où D est un ensemble au plus dénombrable et E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ sont des ensembles de la famille Ψ, donc de mesure nulle. L'ensemble Q serait donc de mesure nulle, contrairement à l'hypothèse. Ainsi $C_{52} \rightarrow C_{54}$.

Il est à remarquer que le théorème selon lequel tout ensemble linéaire mesurable de mesure positive (au sens de Lebesgue) est une somme de $2^{\aleph_0}$ ensembles non mesurables disjoints deux à deux peut être démontré sans faire appel à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ [2].

---

[1] Voir S. Ulam, *Fund. Math.* XX, p. 223 (Satz III).

[2] Voir N. Lusin et W. Sierpiński, *Sur une décomposition du continu en une infinité non dénombrable d'ensembles non mesurables*, C. R. 165; cf. aussi W. Sierpiński, *Bull. Acad. Cracovie* 1918, p. 150.

Un raisonnement correspondant par dualité à celui qui nous a servi pour établir l'implication $C_{52} \to C_{54}$ permet de déduire de C_{52} la conséquence suivante (qui est donc en relation de dualité avec C_{54}):

Proposition C_{55}. *Tout ensemble linéaire de deuxième catégorie de Baire contient une infinité non dénombrable de sous-ensembles disjoints dont chacun est de deuxième catégorie de Baire* [1]).

Proposition C_{56}. *Tout ensemble linéaire Q de mesure extérieure positive contient un sous-ensemble qui n'est pas mesurable relativement à Q,* c. à d. qui n'est pas un produit de Q et d'un ensemble mesurable [2]).

Démonstration. Admettons la proposition C_{53} et supposons que chaque sous-ensemble E d'un ensemble linéaire Q de mesure extérieure positive soit mesurable relativement à Q. Désignons par $m(E)$ la mesure extérieure de E. Nous allons montrer d'abord que la fonction $m(E)$ satisfait aux conditions 1), 2) et 3) de la proposition C_{53}.

Pour 3) cela est évident. Pour 1) cela résulte de l'hypothèse que la mesure extérieure de Q est positive, donc que $m(Q) \neq 0$. Reste à examiner la condition 2).

Soit donc $E_1, E_2, E_3, \ldots$ une suite infinie de sous-ensembles disjoints de Q. On a par hypothèse, pour tout n naturel

$$E_n = QM_n \tag{6}$$

où M_n est un ensemble mesurable. Posons

$$R_1 = M_1 \quad \textit{et} \quad R_n = M_n - \sum_{i=1}^{n-1} M_i \quad \textit{pour} \quad n = 2, 3, \ldots \tag{7}$$

Ce sont évidemment des ensembles mesurables disjoints. Or, les ensembles E_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) étant deux à deux disjoints, on a selon (6) $QM_n M_k = 0$ pour $k \neq n$, donc, en tenant compte de (7),

---

[1]) S. Ulam, *Fund. Math.* XX, p. 222 (Satz I).

[2]) Voir S. Eilenberg, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV (1932), p. 98 (Corollaire 7).

$$E_n = QM_n = QM_n - Q \cdot \sum_{i=1}^{n-1} M_i = QR_n \qquad pour \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Les ensembles $E_1, E_2, E_3, \dots$ sont donc contenus respectivement dans les ensembles mesurables disjoints $R_1, R_2, R_3, \dots$ Il en résulte d'après les théorèmes connus de la théorie de la mesure, que la mesure extérieure de leur somme est égale à la somme de leurs mesures extérieures, c. à d. que $m\left(\sum_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

La condition 2) de la proposition C_{53} est donc aussi vérifiée. Or, la fonction $m(E)$ n'étant pas identiquement nulle pour $E \subset Q$ (puisque $m(Q) > 0$), on se trouve en contradiction avec la proposition C_{53}. Ainsi $C_{53} \to C_{56}$.

Notons que M. Lusin a démontré récemment sans faire appel à l'hypothèse H que *tout ensemble linéaire Q qui n'est pas toujours de première catégorie contient un sous-ensemble non mesurable* (B) *relativement à Q*.

La proposition C_{56} équivaut à la suivante

Proposition C_{57}. *Quel que soit l'ensemble linéaire de mesure extérieure positive, il existe une fonction réelle définie sur lui et n'admettant aucun prolongement à une fonction mesurable de variable réelle* [1]).

Démonstration. Admettons la proposition C_{56} et considérons un ensemble linéaire Q de mesure extérieure positive. En vertu de C_{56} il existe dans Q un sous-ensemble E qui n'est pas mesurable relativement à Q. Définissons sur Q une fonction $\varphi(x)$ comme il suit:

$$\varphi(x) = 1 \quad pour \ x \in E, \qquad \varphi(x) = 0 \quad pour \ x \in Q - E$$

et supposons qu'il existe une fonction mesurable $f(x)$ d'une variable réelle x telle que l'on ait

$$f(x) = \varphi(x) \qquad pour \quad x \in Q.$$

[1]) Voir S. Eilenberg, l. c., p. 95.

L'ensemble $M = \underset{x}{E}\,[f(x) > 0]$ serait alors mesurable et les définitions de $\varphi(x)$ et $f(x)$ donneraient $E = MQ$, contrairement à l'hypothèse sur E.

Le prolongement de la fonction $\varphi(x)$ à une fonction mesurable de variable réelle est donc impossible.

Ainsi $C_{56} \to C_{57}$. La démonstration de l'implication inverse $C_{57} \to C_{56}$ n'exige non plus d'hypothèse H [1]).

Il est à remarquer qu'on peut déduire de la proposition C_{55} la conséquence suivante, qui est en relation de dualité avec la proposition C_{56}:

Proposition C_{58}. *Tout ensemble linéaire Q de deuxième catégorie contient un sous-ensemble qui n'est pas un produit de Q et d'un ensemble jouissant de la propriété de Baire (relativement à la droite).*

Démonstration. Soit Q un ensemble linéaire de deuxième catégorie. D'après C_{55} l'ensemble Q contient une infinité non dénombrable de sous-ensembles disjoints dont chacun est de deuxième catégorie et, par suite, *partout* de deuxième catégorie dans un certain intervalle aux extrémités rationnelles. La famille de tels intervalles étant dénombrable, il en résulte qu'il existe dans Q deux ensembles disjoints Q_1 et Q_2 qui sont partout de deuxième catégorie dans un intervalle I.

Or, on montre sans peine que Q_1 n'est pas un produit de Q et d'un ensemble E jouissant de la propriété de Baire (relativement à la droite). En effet, un tel ensemble E, en tant que contenant Q_1, serait partout de deuxième catégorie dans I. L'ensemble E jouissant de la propriété de Baire, l'ensemble $I - E$ serait donc de première catégorie, ce qui est impossible, puisque les hypothèses que $Q_1 = EQ$, $Q_2 \subset Q$ et $Q_1 Q_2 = 0$ entraînent les relations $EQ_2 = 0$ et $I - E \supset (I - E)\,Q_2 = IQ_2 - EQ_2 = IQ_2$, de sorte que $I - E$ contient l'ensemble IQ_2, qui est de deuxième catégorie.

Il est ainsi établi que $C_{55} \to C_{58}$.

---

[1]) S. Eilenberg, l. c., p. 94 (Théorème 1).

De C_{58} on déduit facilement la conséquence suivante, duale relativement à C_{57}.

Proposition C_{59}. *Quel que soit l'ensemble linéaire de deuxième catégorie, il existe une fonction réelle définie sur lui qui n'admet aucun prolongement à une fonction de variable réelle satisfaisant à la condition de Baire.*

§ 4. Ensembles croissants. Conséquences $C_{60}-C_{64}$ de l'hypothèse H.

Théorème 1. *Etant donnée une famille F de puissance $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ de sous-ensembles de puissance $\mathfrak{m}$ d'un ensemble quelconque M de puissance $\mathfrak{m}$, l'ensemble M contient $\mathfrak{m}$ ensembles disjoints dont chacun admet $\mathfrak{m}$ éléments communs avec chaque ensemble de la famille F* [1]).

Démonstration. Soit φ le plus petit type ordinal correspondant au nombre cardinal $\mathfrak{m}$. En vertu du théorème de M. Zermelo, il existe une suite transfinie du type φ

$$(8) \qquad p_1, p_2, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\xi, \dots \qquad (\xi < \varphi)$$

formée de tous les éléments (différents) de l'ensemble donné M. Considérons une famille quelconque de puissance $\mathfrak{m}$ de sous-ensembles de M de puissance $\mathfrak{m}$. Comme $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, on a $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$ et il existe une suite transfinie du type φ

$$(9) \qquad E_1, E_2, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots, E_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \varphi)$$

composée de tous les ensembles appartenant à la famille F et qui en contient chacun une infinité de puissance $\mathfrak{m}$ des fois.

Nous définirons d'abord par l'induction transfinie pour $\beta \leqslant \alpha < \varphi$ une suite double $\{q_\beta^\alpha\}$ d'éléments de M.

Désignons par q_1^1 le premier terme de la suite (8) qui appartient à l'ensemble E_1. Etant donné un nombre ordinal quelconque λ compris entre 1 et φ, l'ensemble Q_λ de tous les termes q_β^α où $\beta \leqslant \alpha < \lambda$ est évidemment de puissance $< \mathfrak{m}$ (puisque $\lambda < \varphi$ et φ est le plus petit nombre ordinal de la puissance $\mathfrak{m}$), tandis que

[1]) Ce théorème est une généralisation d'un lemme établi par M. C. Kuratowski et moi, *Fund. Math.* VIII, p. 193.

l'ensemble E_λ de la suite (9) est de puissance $\mathfrak{m}$ (puisque $E_\lambda \in F$). Il existe par conséquent $\mathfrak{m}$ éléments de la suite (8) qui appartiennent à $E_\lambda - Q_\lambda$; ils forment donc une suite partielle de (8), également du type φ. Soient

$$(10) \qquad q_1^\lambda, q_2^\lambda, \ldots, q_\omega^\lambda, q_{\omega+1}^\lambda, \ldots, q_\xi^\lambda, \ldots, q_\lambda^\lambda$$

les λ premiers éléments de cette dernière. La suite double $\{q_\beta^\alpha\}$ où $\beta \leqslant \alpha < \varphi$ se trouve ainsi définie.

Ceci étant, désignons d'une façon générale par R_β l'ensemble de tous les q_β^α où $\beta \leqslant \alpha < \varphi$ et considérons deux éléments quelconques $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \in R_{\beta_1}$ et $q_{\beta_2}^{\alpha_2} \in R_{\beta_2}$ où $\beta_1 \leqslant \alpha_1 < \varphi$, $\beta_2 \leqslant \alpha_2 < \varphi$ et $\beta_1 < \beta_2$.

Or, dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2$, les éléments $q_{\beta_1}^{\alpha_1}$ et $q_{\beta_2}^{\alpha_2}$ figurent donc dans la suite (10) avec $\lambda = \alpha_1 = \alpha_2$, d'où $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \neq q_{\beta_2}^{\alpha_2}$, puisque la suite en question a été extraite par définition de la suite (8), formée d'éléments differents. Dans le cas où $\alpha_1 < \alpha_2$, il vient $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \in Q_{\alpha_1+1} \subset Q_{\alpha_2}$ (selon la définition de Q_λ) et $q_{\beta_2}^{\alpha_2} \in E_{\alpha_2} - Q_{\alpha_2}$ (selon la définition de q_β^α), d'où $q_{\beta_2}^{\alpha_2}$ *non*-$\in Q_{\alpha_2}$ et par conséquent $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \neq q_{\beta_2}^{\alpha_2}$. Enfin, dans le cas où $\alpha_1 > \alpha_2$, un raisonnement tout à fait analogue conduit à la-même inégalité. Ainsi l'inégalité $\beta_1 \neq \beta_2$ (où $\beta_1 \leqslant \alpha_1 < \varphi$ et $\beta_2 \leqslant \alpha_2 < \varphi$) entraîne en tout cas l'inégalité $q_{\beta_1}^{\alpha_1} \neq q_{\beta_2}^{\alpha_2}$, c. à d. que les ensembles R_{β_1} et R_{β_2} sont alors disjoints.

Comme il y en a $\mathfrak{m}$, il reste à montrer que chaque R_β admet $\mathfrak{m}$ éléments communs avec n'importe quel ensemble E de la famille F, donné à l'avance.

Or, selon la définition de la suite (9) on a $E = E_\alpha$ pour $\mathfrak{m}$ valeurs distinctes de l'indice α, donc aussi pour $\mathfrak{m}$ valeurs distinctes de cet indice telles que $\beta \leqslant \alpha < \varphi$. Pour chacune de ces valeurs de α, l'élément q_β^α figure donc dans la suite (10) et par conséquent appartient à l'ensemble E_α; d'autre part, q_β^α appartient à R_β en vertu de la définition de cet ensemble. On a ainsi $q_\beta^\alpha \in E_\alpha R_\beta = ER_\beta$ et cette relation se présente pour $\mathfrak{m}$ valeurs différentes de α.

Or, selon la définition de Q_λ on a pour $\alpha_1 < \alpha_2$ les relations $q_\beta^{\alpha_1} \epsilon Q_{\alpha_1+1}$, $q_\beta^{\alpha_2} \epsilon E_{\alpha_2} - Q_{\alpha_2}$ et $Q_{\alpha_1+1} \subset Q_{\alpha_2}$, d'où $q_\beta^{\alpha_1} \neq q_\beta^{\alpha_2}$. L'ensemble ER_β contient donc bien $\mathfrak{m}$ éléments distincts (et pas davantage, puisque $ER_\beta \subset M$ et M est de puissance $\mathfrak{m}$), c. q. f. d.

Proposition C_{60}. *Tout ensemble linéaire qui est partout de deuxième catégorie* [1]) *est une somme d'infinité indénombrable d'ensembles disjoints qui sont aussi partout de deuxième catégorie.*

Démonstration. Admettons l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ et considérons un ensemble linéaire Q qui est partout de deuxième catégorie de Baire. Soit, d'autre part, E un G_δ linéaire qui n'est pas non-dense; il existe alors un intervalle I tel que l'ensemble E est dense dans I. L'ensemble $I-E$ est par conséquent un F_σ ne contenant aucun intervalle, donc un F_σ de première catégorie. Or, Q étant par hypothèse de deuxième catégorie dans I, il en résulte que l'ensemble $QE \supset QEI = QI-(I-E)$ est de deuxième catégorie. C'est donc un ensemble indénombrable et par suite, en vertu de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, de puissance $2^{\aleph_0}$.

Ainsi l'ensemble Q admet $2^{\aleph_0}$ éléments communs avec tout ensemble linéaire G_δ qui n'est pas non-dense.

Or, soit F la famille de tous les ensembles QE où E est nu G_δ linéaire qui n'est pas non-dense. La famille F est par suite de puissance $2^{\aleph_0}$ et chaque ensemble de la famille F est de puissance $2^{\aleph_0}$. Soit M la somme de tous les ensembles de la famille F. C'est évidemment un ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$ et on a $M \subset Q$. En vertu du théorème 1, l'ensemble M contient $2^{\aleph_0}$ sous-ensembles disjoints dont chacun admet $2^{\aleph_0}$ éléments communs avec tout ensemble de la famille F.

Soit R un tel sous-ensemble de M. Nous allons montrer que l'ensemble R est de deuxième catégorie dans tout intervalle I arbitrairement donné à l'avance.

Supposons, par contre, que l'ensemble RI soit de première catégorie, donc contenu dans un F_σ de première catégorie. En dé-

---

[1]) c. à d. de deuxième catégorie dans chaque intervalle (voir p. 41).

signant ce dernier par S, l'ensemble $E = I - S$ est un G_δ et il n'est pas non-dense. QE serait par conséquent un ensemble appartenant à la famille F et, comme tel, il admettrait $2^{\aleph_0}$ éléments communs avec R. Cependant c'est impossible, car on a $RI \subset S$ et $QE = Q(I - S)$.

Ainsi l'ensemble M *contient* $2^{\aleph_0}$ ensembles disjoints dont chacun est de deuxième catégorie dans tout intervalle. Il est donc vrai à plus forte raison que l'ensemble $Q \supset M$ *se compose* de $2^{\aleph_0}$ ensembles de ce genre.

L'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{C}_{60}$ est par conséquent établie.

Il est à remarquer que l'on peut établir (sans employer l'hypothèse $\boldsymbol{H}$) l'implication $\boldsymbol{C}_{55} \rightarrow \boldsymbol{C}_{60}$ [1]). Toutefois, on ne sait démontrer sans faire appel à $\boldsymbol{H}$ où à une autre hypothèse, peut-être moins restrictive, non seulement la proposition $\boldsymbol{C}_{60}$, mais non plus la proposition, d'après laquelle tout ensemble linéaire qui est de deuxième catégorie dans chaque intervalle est une somme de *deux* ensembles disjoints de même nature [2]).

Théorème 2. *Etant donnée une famille F de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ de fonctions d'une variable réelle, il existe toujours une fonction d'une variable réelle $g(x)$ telle que pour toute fonction $f(x)$ appartenant à F l'équation $f(x) = g(x)$ admet $< 2^{\aleph_0}$ racines différentes.*

Démonstration. φ désignant le plus petit nombre ordinal correspondant à la puissance du continu, il existe une suite transfinie du type φ

$$(11) \quad f_1(x), f_2(x), \ldots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \ldots, f_\xi(x), \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

formée de toutes les fonctions de la famille F, répétées au besoin $2^{\aleph_0}$ fois, si la puissance de la famille F est inférieure à $2^{\aleph_0}$. Soit

$$(12) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* XXII, p. 1 et suivantes.

[2]) *Fund. Math.* IV, p. 368, Problème 21 (de M. C. Kuratowski).

une suite transfinie du type φ formée de tous les nombres réels différents.

Pour définir la fonction $g(x)$, posons $g(x_1) = 0$ et procédons par l'induction transfinie comme il suit. Soit $1 < \alpha < \varphi$. Désignons par E_α l'ensemble de tous les nombres $f_\xi(x_\alpha)$ où $\xi < \alpha$. Comme $\alpha < \varphi$, on a $\overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}$, donc $\overline{\overline{E}}_\alpha < 2^{\aleph_0}$, et il existe par conséquent dans la suite (12) des nombres qui n'appartiennent pas à E_α. Soit x_{ξ_α} le premier de tels nombres et $g(x_\alpha) = x_{\xi_\alpha}$.

La fonction $g(x)$ est ainsi définie pour tous les nombres de la suite (12), donc pour tout x réel, et on a

$$(13) \qquad g(x_\alpha) \neq f_\xi(x_\alpha) \qquad pour \quad \xi < \alpha < \varphi.$$

Considérons à présent une fonction quelconque $f(x)$ appartenant à la famille F. C'est donc un terme de la suite (11) et il existe par conséquent un nombre ordinal $\lambda < \varphi$ tel que $f(x) = f_\lambda(x)$. On a en vertu de (13) $g(x_\alpha) \neq f_\lambda(x_\alpha)$ pour $\lambda < \alpha < \varphi$, de sorte que l'égalité $g(x_\alpha) = f_\lambda(x_\alpha)$ ne peut se présenter que, peut-être, pour des nombres ordinaux $\alpha \leqslant \lambda$, dont l'ensemble est de puissance $\leqslant \overline{\lambda} < 2^{\aleph_0}$ (puisque $\lambda < \varphi$). Tous les nombres réels x tels que $f(x) = g(x)$ forment donc un ensemble de puissance $< 2^{\aleph_0}$, c. q. f. d.

Proposition C_{61}. *Etant donnée une famille F de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ de fonctions d'une variable réelle, il existe toujours une fonction d'une variable réelle $g(x)$ telle que pour toute fonction $f(x)$ de la famille F l'ensemble des x réels qui satisfont à l'équation $f(x) = g(x)$ est au plus dénombrable.*

L'implication $H \rightarrow C_{61}$ résulte, en effet, directement du théorème 2, qui précède.

En désignant par F la famille de toutes les fonctions de Baire d'une variable réelle (dont la puissance est, comme on sait, $2^{\aleph_0}$), le théorème 2 entraîne en particulier ce

Corollaire 1. *Il existe une fonction $g(x)$ d'une variable réelle telle que, $f(x)$ étant une fonction de Baire quelconque (d'une va-*

riable réelle), l'ensemble de tous les x réels satisfaisant à l'équation $f(x) = g(x)$ *est de puissance* $< 2^{\aleph_0}$.

Or, nous allons montrer que la fonction $g(x)$ dont il est question dans ce corollaire n'est une fonction de Baire sur aucun ensemble de puissance du continu.

En effet, en supposant que la fonction $g(x)$ soit une fonction de Baire sur un ensemble E de puissance du continu, il existerait, comme on sait [1]), une fonction de Baire d'une variable réelle $f(x)$ qui coïncide avec $g(x)$ sur E, donc sur un ensemble de puissance $2^{\aleph_0}$, contrairement au corollaire 1.

Ainsi la fonction $g(x)$ n'est, en particulier, continue sur aucun ensemble de puissance du continu. On a donc ce

Corollaire 2 [2]). *Il existe une fonction de variable réelle qui est discontinue sur tout ensemble de puissance du continu* [3]).

Moyennant l'hypothèse ***H*** il en résulte tout de suite cette

Proposition C_{62}. *Il existe une fonction de variable réelle qui est discontinue sur tout ensemble non dénombrable.*

Or, comme l'a démontré M. H. Blumberg [4]), toute fonction d'une variable réelle est continue sur un ensemble dénombrable dense dans chaque intervalle.

Théorème 3 [5]). *Il existe une suite transfinie du type* Ω *formée d'ensembles linéaires* G_δ *croissants.*

Démonstration. Soient

$$(14) \qquad x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots$$

---

[1]) Voir p. ex. *Fund. Math.* XVI, p. 81.

[2]) W. Sierpiński et A. Zygmund, *Fund. Math.* IV, p. 316.

[3]) En vertu d'un théorème de M. Lusin, une telle fonction ne peut pas être mesurable (voir p. ex. *Fund. Math.* III, p. 320).

[4]) *Proceed. National Acad. U. S. A.* 8 (1922), p. 283—288.

[5]) W. Sierpiński, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV, p. 103; cf. Z. Zalcwasser, *Fund. Math.* III, p. 45.

une suite transfinie (du type ordinal quelconque) formée de tous les nombres réels et

$$(15) \qquad \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_\omega, \Gamma_{\omega+1}, \ldots, \Gamma_\xi, \ldots$$

une suite transfinie (quelconque) formée de tous les ensembles linéaires G_δ de mesure nulle.

Nous définirons par l'induction transfinie une suite du type Ω d'ensembles G_δ de mesure nulle

$$(16) \qquad E_1, E_2, E_3, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1}, \ldots, E_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

comme il suit.

Posons $E_1 = \Gamma_1$. Etant donné un nombre ordinal α compris entre 1 et Ω, posons $S_\alpha = \sum_{\xi<\alpha} E_\xi$, où E_ξ pour $\xi < \alpha$ sont supposés des G_δ de mesure nulle. Comme la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle, S_α est encore un ensemble de mesure nulle. Il existe donc des termes de la suite (14) qui n'appartiennent pas à S_α. Soient x_{ξ_α} le premier de ces termes et $T_\alpha = S_\alpha + (x_{\xi_\alpha})$; l'ensemble T_α est encore un ensemble de mesure nulle.

Or, tout ensemble de mesure nulle étant, comme on sait, contenu dans un G_δ de mesure nulle, il existe des termes de la suite (15) qui contiennent l'ensemble T_α: nous désignerons par E_α le premier de ces termes.

La suite transfinie (16) est ainsi définie par l'induction transfinie et on a par définition $S_\alpha \subset T_\alpha \subset E_\alpha$. Il en résulte selon la définition de S_α que

$$E_\xi \subset E_\alpha \qquad \textit{pour} \quad \xi < \alpha.$$

D'autre part, on a $x_{\xi_\alpha} \in T_\alpha \subset E_\alpha$ et en même temps x_{ξ_α} *non*-S_α, d'où x_{ξ_α} *non*-$\in E_\xi$, puisque $E_\xi \subset S_\alpha$. Par conséquent

$$E_\xi \neq E_\alpha \qquad \textit{pour} \quad \xi < \alpha.$$

La suite (16) est donc croissante et formée d'ensembles différents, c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'en prenant pour chaque nombre ordinal $\alpha < \Omega$ un point t_α de l'ensemble $E_{\alpha+1} - E_\alpha$, on obtient un ensemble N (de puissance $\aleph_1$) qui jouit de la propriété λ.

En effet, soit

$$D = (t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, t_{\alpha_3}, ...)$$

un sous-ensemble dénombrable de N. Tous les indices α_i ($i = 1, 2, 3, ...$) étant des nombres ordinaux $< \Omega$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $\alpha_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, 3, ...$ Comme $t_\xi \in E_{\xi+1} - E_\xi$, on a donc $t_{\alpha_i} \subset E_{\alpha_i+1} \subset E_\alpha$ pour $i = 1, 2, 3, ...$ (la suite (16) étant croissante). Par conséquent $D \subset E_\alpha$.

Désignons par R l'ensemble de tous les points t_ξ aux indices $\xi < \alpha$. On a t_ξ *non*-$\in E_\xi$ pour $\xi < \Omega$, donc t_ξ *non*-$\in E_\alpha$ pour $\xi \geqslant \alpha$. Il vient donc $R = NE_\alpha$ et, comme $D \subset E_\alpha$ et $D \subset N$, on trouve $D = N \cdot [E_\alpha - (R - D)]$. L'ensemble $R - D$ étant au plus dénombrable (donc un F_σ) et l'ensemble E_α étant un G_δ, l'ensemble $E_\alpha - (R - D)$ est un G_δ et l'ensemble D est un produit de N par un G_δ.

L'ensemble N jouit donc de la propriété λ, c. q. f. d.

Ajoutons que la démonstration du théorème 3 est basée sur la théorie de la mesure, mais qu'on peut démontrer ce théorème d'une façon purement topologique (sans faire intervenir la théorie de la mesure) [1]).

Proposition C_{63}. *Il existe une suite transfinie décroissante de puissance du continu formée d'ensembles linéaire F_σ distincts.*

L'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow C_{63}$ résulte, en effet, aussitôt du théorème 3.

Il est à remarquer que sans l'hypothèse **H** nous ne savons même établir l'existence d'une suite transfinie croissante de puissance $2^{\aleph_0}$ formée d'ensembles linéaires mesurables (B) distincts.

Proposition C_{64}. *Il existe une famille de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles croissants de nombres réels* [2]).

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXVI, note du 26.X.1933.

[2]) Une famille est formée d'ensembles *croissants*, lorsque de deux ensembles de cette famille l'un est toujours contenu dans l'autre; cf. p. 24.

D é m o n s t r a t i o n. Soit T l'ensemble de toutes les suites transfinies du type Ω

$$(17) \qquad a_1, a_2, a_3, \dots, a_\omega, a_{\omega+1}, \dots, a_\xi, \dots \qquad (\xi < \Omega)$$

dont les termes a_ξ sont égaux à 0 ou à 1.

L'ensemble T est évidemment de puissance $2^{\aleph_1}$, donc, d'après l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

Etant donné un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, désignons par E_α l'ensemble de toutes les suites transfinies (ou finies, si $\alpha < \omega$) du type α formées de nombres 0 et 1.

Comme $\alpha < \Omega$, nous aurons évidemment

$$(18) \qquad \overline{\overline{E}}_\alpha = 2^{\overline{\alpha}} \leqslant 2^{\aleph_0}.$$

Posons

$$(19) \qquad E = \sum_{\alpha < \Omega} E_\alpha .$$

Selon (18) et (19) nous trouvons tout de suite $\overline{\overline{E}} \leqslant \aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ et, puisqu'on a évidemment $\overline{\overline{E}} \geqslant \overline{\overline{E}}_\omega = 2^{\aleph_0}$, nous avons

$$(20) \qquad \overline{\overline{E}} = 2^{\aleph_0}.$$

Pour démontrer la proposition C_{64}, il suffit donc selon (20) de définir une famille formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ sous-ensembles croissants de l'ensemble E.

Considérons à ce but un élément x quelconque de l'ensemble T: c'est donc une suite transfinie du type Ω formée de nombres 0 et 1, p. ex. la suite (17). Nous désignerons par $M(x)$ l'ensemble de tous les éléments de l'ensemble E, donc de toutes les suites finies ou transfinies dénombrables

$$(21) \qquad b_1, b_2, b_3, \dots, b_\omega, b_{\omega+1}, \dots, b_\xi, \dots \qquad (\xi < \alpha)$$

formées de nombres 0 et 1, telles qu'il existe un nombre ordinal $\mu < \alpha$ assujetti à la condition

$$(22) \qquad b_\xi \leqslant a_\xi \quad \textit{pour} \quad \xi < \mu \quad \textit{et} \quad b_\mu < a_\mu .$$

Nous allons montrer que si x et x' sont deux éléments différents de l'ensemble T, on a $M(x) \neq M(x')$: notamment soit $M(x) \subset M(x')$, soit $M(x') \subset M(x)$.

Considérons donc la suite transfinie $x' \neq x$ de l'ensemble T:

$$(23) \qquad a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_\omega, a'_{\omega+1}, \ldots, a'_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

La suite (23) diffère par conséquent de la suite (17). Il existe donc un nombre ordinal ν, le plus petit pour lequel on a $a_\nu \neq a'_\nu$. On a par suite soit $a_\nu < a'_\nu$, soit $a_\nu > a'_\nu$. Admettons que $a_\nu < a'_\nu$.

Soit p un élément de $M(x)$: c'est donc une suite (finie ou transfinie dénombrable) de la forme (21) et il existe un nombre ordinal μ assujetti à la condition (22). Or, la définition du nombre ν entraîne que

$$(24) \qquad a_\xi = a'_\xi \quad \textit{pour} \quad \xi < \nu \quad \textit{et} \quad a_\nu < a'_\nu$$

Si $\nu \leqslant \mu$, on a donc selon (22) et (24):

$$b_\xi < a_\xi \quad \textit{pour} \quad \xi < \nu \quad \textit{et} \quad b_\nu < a'_\nu$$

et si $\nu > \mu$, on a selon les mêmes conditions

$$b_\xi < a'_\xi \quad \textit{pour} \quad \xi < \mu \quad \textit{et} \quad b_\mu < a'_\mu.$$

Dans les deux cas on conclut de la définition de $M(x')$ que la suite (21) appartient à $M(x')$, c. à d. que $p \in M(x')$. Nous avons ainsi démontré que $M(x) \subset M(x')$.

Or, désignons par q la suite (finie ou transfinie) du type $\nu + 1$:

$$a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots, a_\nu.$$

La définition des ensembles $M(x)$ et $M(x')$ entraîne alors selon (24) que q *non*-$\in M(x)$ et $q \in M(x')$. On a donc $M(x) \neq M(x')$.

Nous avons ainsi démontré que deux ensembles $M(x)$ et $M(x')$ correspondant aux éléments différents x et x' de l'ensemble T sont toujours différents l'un de l'autre et que l'un d'eux est toujours contenu dans l'autre. Soit Φ la famille de tous les ensembles $M(x)$

correspondant aux éléments x de T. Comme $\overline{\overline{T}} = 2^{2^{\aleph_0}}$, la famille Φ est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

Or, d'après ce que nous venons d'établir sur les ensembles $M(x)$, la famille Φ est formée d'ensembles croissants et la définition des ensembles $M(x)$ montre que ce sont des sous-ensembles de l'ensemble E.

Φ est donc une famille de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ de sous-ensembles croissants de l'ensemble E. Ce dernier étant d'après (20) de puissance $2^{\aleph_0}$, l'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{C}_{64}$ se trouve établie.

Il est à remarquer que *sans admettre l'hypothèse* $\boldsymbol{H}$ *nous savons démontrer qu'il existe une famille de puissance* $> 2^{\aleph_0}$ *d'ensembles croissants de nombres réels* [1].

§ 5. Ensembles presque disjoints. Conséquences $C_{65} - C_{70}$ ($C_{70}a$) de $\boldsymbol{H}$.

Proposition C_{65}. *Il existe une famille F de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles de nombres réels de puissance $2^{\aleph_0}$, telle que deux ensembles (différents) de la famille F ont toujours un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs* [2].

Démonstration. Soient T, E_α et E les ensembles qui viennent d'être considérés dans la démonstration de la proposition C_{64}. Soit x un élément de T. C'est donc une suite transfinie (17) formée de nombres 0 et 1. Désignons pour les nombres ordinaux $\alpha < \Omega$ par $P(x, \alpha)$ la suite partielle du type α de la suite transfinie (17) et par $P(x)$ l'ensemble de toutes les suites $P(x, \alpha)$ où $\alpha < \Omega$. C'est donc un ensemble de puissance $\aleph_1$.

A tout élément x de T correspond ainsi un sous-ensemble $P(x)$ de E (puisqu'on a $P(x, \alpha) \in E_\alpha$ pour $x \in T$ et $\alpha < \Omega$). Nous allons montrer que x et y étant deux éléments distincts de T, les ensembles $P(x)$ et $P(y)$ ont un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *Fund. Math.* III, p. 109.

[2]) Voir W. Sierpiński, *Monatshefte für Math. u. Phys.* 35 (1928), p. 241; cf. A. Tarski *Fund. Math.* XII, p. 199 (Corollaire 20 pour $\alpha = 0$).

Soit à ce but $y \neq x$ la suite transfinie

(25) $$b_1, b_2, b_3, \dots, b_\omega, b_{\omega+1}, \dots, b_\xi, \dots \qquad (\xi < \Omega).$$

Les suites (17) et (25) sont donc différentes et il existe par conséquent un indice $\mu < \Omega$ tel que

(26) $$a_\mu \neq b_\mu.$$

D'après la définition des suites $P(x, \alpha)$ et $P(y, \alpha)$, nous avons selon (26)

$$P(x, \alpha) \neq P(y, \alpha) \qquad \textit{pour} \quad \mu < \alpha < \Omega.$$

D'autres part, on a évidemment

$$P(x, \alpha) \neq P(y, \beta) \qquad \textit{pour} \quad \alpha \neq \beta,$$

puisque $P(x, \alpha)$ est une suite du type α et $P(x, \beta)$ en est une du type β.

Selon la définition des ensembles $P(x)$ et $P(y)$ ces ensembles ont donc en commun au plus $\overline{\mu}$ éléments, où $\overline{\mu} \leqslant \aleph_0$, puisque $\mu < \Omega$.

Désignons par F la famille de tous les ensembles $P(x)$ correspondant aux éléments x de l'ensemble T. Ce dernier étant, comme nous savons, de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, la famille F est aussi de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ et, comme nous venons de démontrer, deux ensembles distincts de la famille F ont toujours un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs. Or, $P(x) \subset E$ pour $x \in T$, de sorte que F est une famille de sous-ensembles de E. Ce dernier étant selon (20) de puissance $2^{\aleph_0}$, l'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{C}_{65}$ se trouve démontrée.

Il est à remarquer que l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ n'est intervenue dans la démonstration des propositions $\boldsymbol{C}_{64}$ et $\boldsymbol{C}_{65}$ que pour établir la puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ de l'ensemble T. Or, on a le théorème suivant:

Théorème 4 [1]. *La proposition* $\boldsymbol{C}_{65}$ *est équivalente à l'égalité*

$$2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_1}.$$

---

[1] A. Tarski, *Fund. Math.* XII, p. 199 (Corollaire 20).

Démonstration. 1° D'après la remarque qui précède, il suffit, pour établir la proposition C_{65}, de démontrer que l'ensemble T de toutes les suites transfinies du type Ω de nombres 0 et 1 (qui est par définition de puissance $2^{\aleph_1}$) est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, c. à d. que $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_1}$. Cette égalité entraîne donc la proposition C_{65}.

2° Admettons à présent la proposition C_{65}. Il existe donc une famille F de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles indénombrables de nombres réels, ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs. A tout ensemble N de F faisons correspondre un sous-ensemble $Q(N)$ de N de puissance $\aleph_1$. La famille Φ de tous les ensembles de nombres réels de puissance $\aleph_1$, étant de puissance $2^{\aleph_1}$, il résulte de l'inégalité $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_1}$ qu'on ne peut pas avoir toujours $Q(N) \neq Q(N')$ pour deux ensembles distincts N et N' de F, donc qu'il existe deux ensembles N et $N' \neq N$ de F tels que l'on a $Q(N) = Q(N')$. Or, c'est impossible, les ensembles N et N' ayant d'après la propriété de la famille F un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs et l'ensemble $Q(N)$ étant de puissance $\aleph_1$.

L'inégalité $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_1}$ ne peut donc avoir lieu. On a par conséquent $2^{2^{\aleph_0}} \leqslant 2^{\aleph_1}$ et, puisque d'autre part on a évidemment $2^{\aleph_1} \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$, on obtient $2^{2^{\aleph_0}} = 2^{\aleph_1}$.

Dans le même ordre d'idées on a encore ce

Théorème 5 [1]. *L'inégalité $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une famille F de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles de nombres réels de puissance $2^{\aleph_0}$ ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs.*

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit F une famille d'ensembles satisfaisant aux conditions du théorème. Faisons correspondre à tout ensemble N de F un sous-ensemble $Q(N)$ de N de puissance $\aleph_1$. Par hypothèse on doit avoir $Q(N) \neq Q(N')$ pour tout couple N et N' d'ensembles distincts appartenant à la

[1] Cf. A. Tarski, *Fund. Math.* XII, p. 198 (Corollaire 18).

famille F. La famille Φ de tous les ensembles $Q(N)$ où $N \in F$ est donc de la même puissance que la famille F. Par conséquent $\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{\Phi}} > 2^{\aleph_0}$. Or, les ensembles N étant des sous-ensembles de puissance $\aleph_1$ de l'ensemble de tous les nombres réels, on a évidemment $\overline{\overline{\Phi}} \leqslant 2^{\aleph_1}$. Ainsi $2^{\aleph_0} < 2^{\aleph_1}$.

La condition est suffisante. Il suffit pour le montrer de consulter la démonstration de la proposition C_{64} (où C_{65}) et d'appliquer la remarque que $\overline{\overline{T}} = 2^{\aleph_1}$.

Considérons à présent un ensemble linéaire N qui satisfait aux conditions de la proposition C_{32}. L'ensemble N étant de puissance du continu, il existe une correspondance biunivoque entre N et l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels. En vertu de la proposition C_{65}, il existe donc une famille Φ de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ formée de sous-ensembles de puissance $2^{\aleph_0}$ de N et telle que deux ensembles (différents) de la famille Φ ont toujours un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs. Or, l'ensemble N satisfaisant à la proposition C_{32}, tout sous-ensemble non dénombrable de N, donc tout ensemble de la famille Φ, est non mesurable. On a ainsi cette

Proposition C_{66}. *Il existe une famille Φ de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles linéaires non mesurables qui ont deux à deux un ensemble au plus dénombrable de points communs.*

Appelons *presque disjoints* deux ensembles infinis, si l'ensemble de leurs éléments communs est d'une puissance inférieure à celle de l'un et de l'autre. Il est à remarquer qu'on peut démontrer sans l'hypothèse H que *tout ensemble infini de puissance* $\mathfrak{m}$ *est la somme d'une famille de puissance* $> \mathfrak{m}$ *d'ensembles presque disjoints* [1]).

---

[1]) Voir ma Note dans *Monatshefte für Math. und Phys.* 35, p. 239. La décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints a été l'objet d'un Mémoire de M. A. Tarski, *Fund. Math.* XII, p. 188—205.

Proposition C_{67}. *Il existe une décomposition de l'intervalle $\mathcal{I} = [0 \leqslant x \leqslant 1]$ en $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles qui sont de mesure extérieure* 1, *de deuxième catégorie dans tout intervalle et qui n'ont deux à deux qu'un ensemble au plus dénombrable de points communs* [1]).

Démonstration. E étant un ensemble linéaire quelconque, désignons d'une façon générale par $E(r)$ l'ensemble obtenu de E par translation de longueur r (dans la direction positive). Partageons tous les nombres réels en classes, en rangeant dans une même classe deux nombres réels dans le cas et dans ce cas seulement où leur différence est rationelle. Choisissons un seul nombre dans chacune de ces classes et désignons par V leur ensemble: c'est le bien connu ensemble non mesurable de G. Vitali.

Soit

(27) $$r_1, r_2, r_3, \ldots$$

une suite infinie, formée de tous les nombres rationnels différents.

On a évidemment

(28) $$V(r_i) \cdot V(r_j) = 0 \qquad pour \quad i \neq j,$$

et

(29) $$\mathcal{E} = V(r_1) + V(r_2) + V(r_3) + \ldots$$

L'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels est donc la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints, superposables avec V. Par conséquent V est un ensemble de deuxième catégorie.

Divisons l'ensemble (27) en deux ensembles denses disjoints:

(30) $$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

et

(31) $$q_1, q_2, q_3, \ldots$$

Admettons maintenant l'hypothèse ***H***. L'ensemble V étant de mesure extérieure positive et de deuxième catégorie, il existe d'une part d'après la proposition C_{32} un ensemble $P \subset V$ de puissance $2^{\aleph_0}$ et tel que tout sous-ensemble non dénombrable de P est non mesurable (L), et d'autre part d'après la proposition C_6

---

[1]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIII, p. 195.

un ensemble $Q \subset V$ de puissance $2^{\aleph_0}$ et tel que tout sous-ensemble non dénombrable de Q est de deuxième catégorie.

Il résulte de la proposition C_{65} qu'il existe une décomposition de tout ensemble de puissance du continu en une famille de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$ d'ensembles non dénombrables ayant deux à deux un ensemble au plus dénombrable d'éléments communs: soit

$$(32) \qquad P = \sum_{\xi < \varphi} P_\xi$$

une telle décomposition de l'ensemble P et

$$(33) \qquad Q = \sum_{\xi < \varphi} Q_\xi$$

une telle décomposition de l'ensemble Q (φ désigne ici le premier nombre ordinal tel qe $\overline{\varphi} = 2^{2^{\aleph_0}}$).

Posons maintenant

$$(34) \qquad X_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} [P_\xi(p_n) + Q_\xi(q_n)] \qquad pour \quad 1 < \xi < \varphi$$

et

$$(35) \qquad X_1 = \left(X - \sum_{1 < \xi < \varphi} X_\xi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_1(p_n) + Q_1(q_n)].$$

Nous aurons évidemment d'après (34) et (35)

$$(36) \qquad \mathcal{I} = \sum_{\xi < \varphi} \mathcal{I} X_\xi$$

Or, nous allons montrer que la décomposition (36) de l'intervalle $\mathcal{I}$ satisfait à la proposition à démontrer.

Soient ξ et $\eta \neq \xi$ deux indices donnés inférieurs à φ. Il vient d'après les propriétés des décompositions (32) et (33):

$$(37) \qquad \overline{\overline{P_\xi P_\eta}} \leqslant \aleph_0 \qquad et \qquad \overline{\overline{Q_\xi Q_\eta}} \leqslant \aleph_0.$$

Comme $P \subset V$ et $Q \subset V$, on a évidemment d'après (32) et (33) $P_\xi \subset E$ et $Q_\eta \subset E$, donc

$$(38) \qquad P_\xi(r_n) \subset V(r_n) \quad et \quad Q_\eta(r_n) \subset V(r_n) \qquad pour \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

et parsuite, d'après (28), les termes des suites (30) et (31) étant des termes différents de la suite (27):

$$[P_\xi(p_i) + Q_\xi(q_i)] \cdot [P_\eta(p_j) + Q_\eta(q_j)] = 0 \qquad \textit{pour } i \neq j,$$

ce qui donne selon (34) et (35)

$$X_\xi X_\eta = \sum_{n=1}^{\infty} [P_\xi(p_n) + Q_\xi(q_n)] \cdot [P_\eta(p_n) + Q_\eta(q_n)].$$

Il en résulte sans peine en vertu des inégalités $p_n \neq q_n$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ et d'après (38) et (28) que

$$(39) \qquad X_\xi X_\eta = \sum_{n=1}^{\infty} [P_\xi(p_n)\, P_\eta(p_n) + Q_\xi(q_n)\, Q_\eta(q_n)].$$

Or, on a selon (37)

$$\overline{\overline{P_\xi(p_n)\, P_\eta(p_n)}} \leqslant \aleph_0 \quad \textit{et} \quad \overline{\overline{Q_\xi(q_n)\, Q_\eta(q_n)}} \leqslant \aleph_0 \qquad \textit{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

La formule (39) donne donc

$$\overline{\overline{X_\xi X_\eta}} \leqslant \aleph_0 \qquad \textit{pour} \quad \xi \neq \eta.$$

Nous avons ainsi démontré que les termes de la série (36) ont deux à deux un ensemble au plus dénombrable de points communs.

Soit $\xi < \varphi$ un indice donné. L'ensemble P_ξ, en tant que sous-ensemble non dénombrable de P, est de mesure extérieure positive. Les nombres (30) formant un ensemble dense dans tout intervalle, il en résulte sans peine que le complémentaire de l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} P_\xi(p_n)$ est de mesure intérieure nulle [1]).

---

[1]) En effet, on démontre sans peine le théorème suivant:

Etant donnés un ensemble linéaire T de mesure extérieure positive et une suite infinie $p_1, p_2, p_3, \ldots$ de nombres réels, dense dans tout intervalle, le complémentaire de l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} T(p_n)$ est de mesure intérieure nulle.

Or, l'ensemble Q_ξ, en tant que sous-ensemble non dénombrable de Q, est de deuxième catégorie. Les nombres (31) formant un ensemble dense dans tout intervalle, il en résulte que l'ensemble $\sum_{n=1}^{\infty} Q_\xi(q_n)$ est de deuxième catégorie dans tout intervalle.

On en conclut tout de suite selon (34) et (35) que les ensembles X_ξ $(\xi < \varphi)$ sont de deuxième catégorie dans tout intervalle et que leurs complémentaires sont de mesure intérieure nulle, c. q. f. d.

Proposition C_{68} [1]. *Il existe parmi les ensembles linéaires indénombrables un ensemble K de première catégorie que chaque translation le long de la droite transforme en lui-même, abstraction faite tout au plus d'une infinité dénombrable de points.*

Démonstration. Admettons l'hypothèse **H** et soit

$$(40) \qquad x_1 = 0, x_2, x_3, \dots, x_\omega, x_{\omega+1}, \dots, x_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega)$$

une suite transfinie du type Ω formée de tous les nombres réels.

Soit Q un ensemble linéaire de *mesure nulle* ne contenant pas le nombre 0 et tel que son complémentaire CQ soit de *première catégorie*. Désignons d'une façon générale par $Q(a)$ la translation de l'ensemble Q de longueur a, c. à d. l'ensemble de tous les nombres réels $x + a$ où $x \in Q$.

Nous allons d'abord définir par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\alpha\}$, où $\alpha < \Omega$, comme il suit.

Posons $p_1 = x_1$. Etant donné un α ordinal compris entre 1 et Ω, désignons par Q_α la somme de tous les ensembles

$$Q(-x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \dots - x_{\xi_n}),$$

où $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ est une suite finie quelconque de nombre ordinaux $< \alpha$. Comme $\alpha < \Omega$, l'ensemble de telles suites est évidemment au plus dénombrable. Or, $Q(a)$ étant pour tout a réel un ensemble de mesure nulle, il en est de même pour tout $\alpha < \Omega$ de l'ensemble Q_α, qui est est par définition une somme d'un nombre

---

[1]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 22. Cf. S. Banach, ibid., p. 15.

fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de *mesure nulle.* En désignant donc par P_α l'ensemble de tous les points p_ξ où $\xi < \alpha$ (c. à d. un ensemble au plus dénombrable, puisque $\alpha < \Omega$), la somme $S_\alpha = P_\alpha + Q_\alpha$ constitue encore un ensemble de mesure nulle. Il existe par conséquent, dans la suite (40) de tous les nombres réels, des nombres n'appartenant pas à S_α et c'est le premier de ces nombres que nous désignerons par p_α.

La suite transfinie

$$(41) \qquad p_1 = 0, p_2, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\alpha, \dots \qquad (\alpha < \Omega)$$

se trouve ainsi définie et il est évident que tous les termes de cette suite sont distincts.

Ceci établi, désignons par K l'ensemble formé de p_1 et de tous les nombres de la forme

$$(42) \qquad p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n},$$

où $1 < \alpha < \Omega$ et $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ est une suite finie arbitraire de nombres ordinaux $< \alpha$. Comme $x_1 = 0$, l'ensemble K ainsi défini contient évidemment tous les points p_α où $\alpha < \Omega$. Par conséquent il est indénombrable. Or, nous allons montrer que

$$(43) \qquad K \cdot Q = 0.$$

A ce but supposons, par contre, qu'il existe un point $p \in K \cdot Q$. On a $p \neq p_1$, puisque $p_1 = x_1 = 0$ et le point 0 n'appartient pas à Q. Comme appartenant à K, le nombre p serait donc de la forme (42), d'où, en tenant compte que $p \in Q$, on tire aussitôt $p_\alpha \in Q(-x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \dots - x_{\xi_n})$ et par conséquent $p_\alpha \in Q_\alpha \subset S_\alpha$, contrairement à la définition de la suite (41).

L'égalité (43) est ainsi établie. Elle revient à dire que K est situé dans CQ, qui est par hypothèse de première catégorie. L'ensemble K est donc lui-même de *première catégorie.*

Considérons enfin les translations de K. Soit a un nombre réel quelconque. C'est donc un terme de la suite (40). Il existe par conséquent un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ tel que $a = x_\lambda$. Etant

donné un point arbitraire $p \in K(a) - K$, on a selon la définition de K d'une part

(44) $$p = p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n} + x_\lambda,$$

puisque $p \in K(a)$ et d'autre part $\alpha \leqslant \lambda$, puisque dans le cas contraire p appartiendrait à K.

Il est ainsi démontré que chaque point p de l'ensemble $K(a) - K$ est de la forme (44) où $\alpha \leqslant \lambda$ et $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $< \alpha$. Or, l'ensemble de tous les nombres p de ce genre pour $a = x_\lambda$ fixe est évidemment au plus dénombrable, c. q. f. d.

L'implication $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{C}_{68}$ est ainsi établie.

Il est à remarquer qu'en remplaçant partout dans la démonstration qui précède les termes *première catégorie* par *mesure nulle* et inversement, on transforme cette démonstration en celle de la proposition suivante, qui est donc avec $\boldsymbol{C}_{68}$ en relation de dualité:

Proposition $\boldsymbol{C}_{69}$. *Il existe parmi les ensembles linéaires indénombrables un ensemble M de mesure nulle que chaque translation transforme en lui-même, si l'on en néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points.*

Ajoutons qu'on peut démontrer le théorème suivant:

Etant donné un ensemble mesurable (linéaire) M qui se transforme par chaque translation en lui-même, si l'on en néglige un ensemble de points de puissance $< 2^{\aleph_0}$, soit M, soit le complémentaire de M est un ensemble de mesure nulle.

Ce théorème résulte sans peine de la propriété d'ensembles de mesure positive de contenir des points de densité.

Théorème 6 [1]. *Il existe un ensemble linéaire N de puissance $2^{\aleph_0}$, non mesurable et tel que chaque translation le transforme en lui-même, abstraction faite d'un ensemble de points de puissance $< 2^{\aleph_0}$.*

Démonstration. Soient φ le plus petit nombre ordinal de puissance du continu et

---

[1]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* XIX, p. 24.

$$(45) \qquad x_1 = 0, x_1, x_2, \ldots, x_\omega, x_{\omega+1}, \ldots, x_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie du type φ formée de tous les nombres réels. La famille de tous les ensembles linéaires parfaits étant de puissance du continu, il existe une suite transfinie du type φ:

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_\omega, P_{\omega+1}, \ldots, P_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

formée de tous les ensembles linéaires parfaits.

Nous allons d'abord définir par l'induction transfinie deux suites $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$ du type φ.

Soient à ce but p_1 le premier terme de la suite (45) qui appartient à P_1 et q_1 le premier terme de la même suite qui appartient à P_1, mais qui est distinct de p_1. Etant donné un α ordinal quelconque compris entre 1 et φ, désignons par S_α l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$q_\xi - x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \ldots - x_{\xi_n}$$

où $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ est une suite finie arbitraire de nombres ordinaux inférieurs à α. L'ensemble S_α est évidemment de puissance $\leqslant \overline{\alpha} + \overline{\alpha}^2 + \overline{\alpha}^3 + \ldots$, donc de puissance $< 2^{\aleph_0}$, puisque $\alpha < \varphi$, d'où $\overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}$. L'ensemble parfait P_α étant (comme parfait) de puissance du continu, l'ensemble $P_\alpha - S_\alpha$ n'est pas vide et c'est le premier terme de la suite (45) appartenant à $P_\alpha - S_\alpha$ que nous désignerons par p_α. Désignons, d'autre part, par T_α l'ensemble de tous les nombres réels de la forme

$$p_\xi + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \ldots + x_{\xi_n}$$

où $\xi \leqslant \alpha$ et les nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sont $< \alpha$. Comme $\alpha < \varphi$, on voit sans peine que $\overline{\overline{T}}_\alpha < 2^{\aleph_0}$, de sorte que l'ensemble $P_\alpha - T_\alpha$ n'est pas vide; c'est le premier terme de la suite (45) appartenant à $P_\alpha - T_\alpha$ que nous désignerons par q_α.

Les suites transfinies $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$ étant ainsi définies, soient N l'ensemble de tous les nombres de la forme

$$p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \ldots + x_{\xi_n}$$

où $\alpha < \varphi$ et $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et Q l'ensemble de tous les points q_α où $\alpha < \varphi$. Nous allons prouver que

(46) $$N \cdot Q = 0.$$

Supposons, par contre, qu'il existe un nombre $p \in N \cdot Q$. Comme $p \in N$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \varphi$ et une suite finie de nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ inférieurs à α, tels que

(47) $$p = p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n}.$$

D'autre part, comme $p \in Q$, il existerait un nombre ordinal $\beta < \varphi$ tel que

(48) $$p = q_\beta$$

et on aurait par définition q_β *non*-$\in T_\beta$; or, pour $\alpha \leqslant \beta$ on a selon la définition de T_β la relation $p \in T_\beta$, de sorte qu'on obtiendrait dans ce cas $p \neq q_\beta$, contrairement à (45); enfin, pour $\alpha > \beta$ on a d'après la définition de p_α la relation p_α *non*-$\in S_\alpha$ et comme la définition de S_α entraîne la relation $q_\beta - x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \dots - x_{\xi_n} \in S_\alpha$, il vient $p_\alpha \neq q_\beta - x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \dots - x_{\xi_n}$, contrairement à (47) et (48).

L'égalité (46) est ainsi établie. Comme la définition de l'ensemble N et celles de $\{p_\alpha\}$ et $\{q_\alpha\}$ entraînent respectivement que $p_\alpha \in N$, $p_\alpha \in P_\alpha$ et $q_\alpha \in P_\alpha$ pour tout $\alpha < \varphi$, il vient $P_\alpha N \neq 0 \neq P_\alpha Q$ pour $\alpha < \varphi$, de sorte que chacun des ensembles N et Q admet des points communs avec tout ensemble parfait. Or, les deux ensembles en question étant selon (46) disjoints, il en résulte qu'ils sont de puissance du continu, non mesurables et partout de deuxième catégorie.

Considérons enfin les translations de N. Soit a un nombre réel arbitraire. C'est donc un terme de la suite (45). Il existe par conséquent un nombre ordinal $\lambda < \varphi$ tel que $a = x_\lambda$. En désignant d'une façon générale par $N(a)$ l'image de la translation de N de longueur a, soit p un point quelconque $p \in N(a) - N$.

Comme $p \in N(a)$, on a alors selon la définition de N d'une part:

(49) $$p = q_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n} + x_\lambda,$$

où $\alpha < \varphi$ et $\xi_i < \alpha$ pour $i = 1, 2, \dots, n$ et, d'autre part, $\lambda \leqslant \alpha$, puisque dans le cas contraire p appartiendrait à N.

Il est ainsi démontré que chaque point de l'ensemble $N(a) - N$ est de la forme (49) où $\lambda \leqslant \alpha$ et $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sont des nombres ordinaux $< \alpha$. Or, l'ensemble de tous les nombres p de ce genre est évidemment de puissance $\leqslant \aleph_0 + \overline{\overline{\lambda}}$, donc de puissance $< 2^{\aleph_0}$, puisque $\lambda < \varphi$ et $\overline{\overline{\varphi}} < 2^{\aleph_0}$.

Proposition C_{70}. *Il existe un ensemble linéaire non mesurable que chaque translation transforme en lui-même, abstraction faite d'un ensemble au plus dénombrable de points.*

L'implication $H \to C_{70}$ est une conclusion immédiate du théorème 6, qui vient d'être établi.

Signalons l'application suivante de la proposition C_{70}.

Etant donnée une fonction $f(x)$ de variable réelle, appelons *presque-période* de $f(x)$ tout nombre réel a qui satisfait à l'équation $f(x+a) = f(x)$ pour toutes les valeurs de $x \in \mathcal{E}$, sauf pour un ensemble au plus dénombrable [1]). En désignant alors par $f(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble N assujetti aux conditions de la proposition C_{70}, cette dernière peut s'exprimer comme il suit:

Proposition $C_{70}a$. *Il existe parmi les fonctions d'une variable réelle une fonction non mesurable telle que chaque nombre réel est sa presque-période.*

§ 6. Images par fonctions de Baire. Conséquences $C_{71} - C_{74}$ de l'hypothèse H.

Proposition C_{71}. *F étant une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$ et Φ une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ de fonctions mesurables d'une variable réelle, il existe un ensemble linéaire E de puissance $2^{\aleph_0}$ tel que pour toute fonction $\varphi(x)$ de la*

---

[1]) Dans ma Note de *Fund. Math.* XIX, p. 27, j'ai donné une autre définition de la *presque-période;* elle coïncide avec celle qui est adoptée ici dans le cas où l'hypothèse H est vraie.

famille Φ l'ensemble $\varphi(E)$ ne contient aucun ensemble de la famille F [1]).

D é m o n s t r a t i o n. Les familles F et Φ étant de la puissance $2^{\aleph_0}$, donc d'après l'hypothèse *H* de la puissance $\aleph_1$, il existe (en vertu de l'égalité $\aleph_1^2 = \aleph_1$) une suite transfinie du type Ω d'ensembles de la famille F:

$$E_1, E_2, E_3, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots, E_\xi, \dots \qquad (\xi < \Omega)$$

et une suite transfinie du type Ω de fonctions de la famille Φ:

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_\omega(x), f_{\omega+1}(x), \dots, f_\xi(x), \dots \qquad (\xi < \Omega)$$

telles que pour tout ensemble $M \in F$ et pour toute fonction $\varphi \in \Phi$ il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$ pour lequel $M = E_\alpha$ et $\varphi(x) = f_\alpha(x)$.

Nous allons définir par l'induction transfinie une suite transfinie du type Ω d'ensembles de mesure nulle

$$(50) \qquad N_1, N_2, N_3, \dots, N_\omega, N_{\omega+1}, \dots, N_\xi, \dots \qquad (\xi < \Omega)$$

et une suite transfinie du type Ω de nombres réels

$$(51) \qquad p_1, p_2, p_3, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\xi, \dots \qquad (\xi < \Omega).$$

Pour définir l'ensemble N_1 distinguons deux cas:

1) $E_1 - f_1(\mathcal{E}) \neq 0$. Nous poserons dans ce cas $N_1 = 0$.

2) $E_1 \subset f_1(\mathcal{E})$. Les ensembles $Q(a) = \underset{x}{E}\,[f_1(x) = a]$ qui viennent correspondre aux différents nombres a de E_1 sont disjoints et mesurables, puisque $f_1(x)$ est une fonction mesurable. L'ensemble E_1 étant indénombrable et contenu dans $f_1(X)$, il existe un nombre $a_1 \in E_1$ tel que $Q(a_1)$ est un ensemble non vide de mesure nulle. Nous poserons alors $N_1 = Q(a_1)$.

Le nombre p_1 sera défini dans le cas 1) aussi bien que dans le cas 2) comme un nombre réel arbitraire n'appartenant pas à N_1.

Etant donné un nombre ordinal α tel que $1 < \alpha < \Omega$, distinguons encore deux cas:

---

[1]) W. S i e r p i ń s k i, *Fund. Math.* XIX, p. 205 et p. 210.

1) Si $E_\alpha - f_\alpha(\mathcal{E}) \neq 0$, posons $N_\alpha = 0$.

2) Si $E_\alpha \subset f_\alpha(\mathcal{E})$, nous concluons comme plus haut qu'il existe une infinité indénombrable de nombres a de E_α tels que $\underset{x}{E}\,[f_\alpha(x) = a]$ est un ensemble non vide de mesure nulle. Les ensembles $\underset{x}{E}\,[f_\alpha(x) = a]$ qui viennent correspondre aux nombres a différents étant disjoints deux à deux, on voit sans peine qu'il existe un nombre $a_\alpha \in E_\alpha$ tel que l'ensemble $\underset{x}{E}\,[f_\alpha(x) = a_\alpha]$ est non vide, de mesure nulle et ne contient aucun nombre p_ξ où $\xi < \alpha$ (l'ensemble de ces derniers étant au plus dénombrable, puisque $\alpha < \Omega$). Nous poserons alors

$$N_\alpha = \underset{x}{E}\,[f_\alpha(x) = a_\alpha]. \tag{52}$$

Enfin, les ensembles N_ξ ($\xi < \alpha$) étant de mesure nulle, il en est de même de leur somme (puisque $\alpha < \Omega$), ainsi que de l'ensemble $S_\alpha = \sum_{\xi \leqslant \alpha} N_\xi + \sum_{\xi < \alpha} (p_\xi)$. Il existe donc un nombre p_α *non*-$\in S_\alpha$.

Ainsi les ensembles (50) et les nombres (51) se trouvent définis par l'induction transfinie.

Or, soit E l'ensemble de tous les nombres de la suite (51): c'est un ensemble de puissance $\aleph_1$, donc d'après l'hypothèse ***H*** de puissance $2^{\aleph_0}$, puisqu'on a p_α *non*-$\in S_\alpha$ pour $1 < \alpha < \Omega$, d'où selon la définition de l'ensemble S_α l'inégalité $p_\alpha \neq p_\xi$ pour $\xi < \alpha$.

Supposons que l'on ait $f_\alpha(E) \supset E_\alpha$ pour un nombre ordinal $\alpha < \Omega$.

De la définition des suites (50) et (51) résulte tout de suite que p_ξ *non*-$\in N_\eta$ pour $\xi < \Omega$ et $\eta < \Omega$. Il vient donc

$$E N_\alpha = 0. \tag{53}$$

Or, l'hypothèse que $f_\alpha(E) = E_\alpha$ entraîne que $E_\alpha \subset f_\alpha(E) \subset f_\alpha(\mathcal{E})$, puisque $E \subset \mathcal{E}$. D'après la définition de l'ensemble N_α on a donc la formule (52). Mais la définition du nombre a_α donne $a_\alpha \in E_\alpha$; comme $E_\alpha \subset f_\alpha(E)$, il existe donc un nombre x_0 de E tel que $a_\alpha = f_\alpha(x_0)$, ce qui entraîne d'après (52) la relation $x_0 \in N_\alpha$, contraire à (53).

Il est ainsi démontré que l'on a $E_\alpha - f_\alpha(E) \neq 0$ pour $\alpha < \Omega$. L'ensemble E satisfait donc aux conditions de la proposition $\boldsymbol{C}_{71}$, de sorte que l'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{C}_{71}$ se trouve établie.

Il est à remarquer que la proposition $\boldsymbol{C}_{71}$ cesse d'être vraie (si l'on admet l'hypothèse $\boldsymbol{H}$) pour les familles Φ, même dénombrables, de fonctions quelconques d'une variable réelle et même dans le cas où la famille F est formée d'un seul ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels. C'est une conséquence immédiate de la proposition $\boldsymbol{P}_3$ (Chap. I, p. 12).

La famille de toutes les fonctions de Baire d'une variable réelle ayant la puissance du continu et toute fonction de Baire étant mesurable, on déduit tout de suite de la proposition $\boldsymbol{C}_{71}$ cette

Proposition $\boldsymbol{C}_{72}$. *F étant une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe un ensemble linéaire E de puissance $2^{\aleph_0}$ tel que pour toute fonction de Baire $\varphi(x)$ d'une variable réelle l'ensemble $\varphi(E)$ ne contient aucun ensemble de la famille F.*

La proposition $\boldsymbol{C}_{72}$ peut être aussi exprimée comme il suit:

Proposition $\boldsymbol{C}_{72^a}$. *F étant une famille de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe toujours un ensemble linéaire E de puissance $2^{\aleph_0}$ dont les images obtenues par des fonctions de Baire définies dans E ne contiennent aucun ensemble de la famille F.*

En effet, soient F une famille donnée de puissance $2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires et E un ensemble linéaire satisfaisant à la proposition $\boldsymbol{C}_{72}$. Etant donnée une fonction de Baire $f(x)$ définie dans E, il existe, comme on sait, une fonction de Baire $\varphi(x)$ d'une variable réelle, telle que l'on ait $\varphi(x) = f(x)$ pour $x \in E$. D'après la proposition $\boldsymbol{C}_{72}$ il vient $Q - f(E) \neq 0$ pour $Q \in F$. Or, on a évidemment $\varphi(E) = f(E)$, d'où $Q - \varphi(E) \neq 0$ pour $Q \in F$, ce qui prouve que l'ensemble E satisfait à la proposition $\boldsymbol{C}_{72^a}$.

Il est à remarquer qu'un cas particulier très spécial de la proposition $\boldsymbol{C}_{72^a}$ est donné par la proposition $\boldsymbol{C}_5$ (voir Chap. II, p. 51).

Nous allons déduire une conséquence de la proposition $C_{72}a$. Soit ω_2 le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_2$. Considérons la suite transfinie du type ω_2 d'ensembles linéaires E_α $(\alpha < \omega_2)$ définie par l'induction transfinie comme il suit.

Soit $E_1 = \mathcal{E}$. Etant donné un nombre ordinal α compris entre 1 et ω_2, soit F_α la famille de tous les ensembles E_ξ où $\xi < \alpha$. En vertu de l'hypothèse *H* la puissance $\overline{\alpha} \leqslant \aleph_1$ de la famille F_α est donc $\leqslant 2^{\aleph_0}$. En désignant par Φ_α la famille de tous les ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$ qui sont des images des ensembles de F_α données par fonctions de Baire, il vient aussi $\overline{\overline{\Phi}}_\alpha \leqslant 2^{\aleph_0}$, puisque tout ensemble linéaire admet $\leqslant 2^{\aleph_0}$ images par fonctions de Baire. En vertu de la proposition $C_{72}a$ il existe donc un ensemble linéaire E_α de puissance $2^{\aleph_0}$ dont toutes les images par fonctions de Baire sont distinctes de tous les ensembles de la famille Φ_α. La suite transfinie d'ensembles E_α $(\alpha < \omega_2)$ est ainsi définie.

Or, nous allons montrer que des deux termes différents de cette suite aucun n'est une image par fonction de Baire d'aucun autre.

En effet, soient α et $\beta > \alpha$ deux nombres ordinaux $< \omega_2$. Comme $\alpha < \beta$, on conclut aussitôt de la définition de l'ensemble E_β que E_α n'est pas une image par fonction de Baire de E_β. D'autre part, E_β ne peut être une telle image de E_α, puisqu'on aurait dans ce cas $E_\beta \in \Phi_\alpha$, contrairement à la définition de E_β.

On aboutit ainsi à la proposition suivante:

Proposition C_{73}. *Il existe une famille F formée de $\aleph_2$ ensembles linéaires de puissance $2^{\aleph_0}$ et telle que des deux ensembles distincts quelconques de cette famille aucun ne s'obtient par une fonction de Baire comme une image de l'autre.*

On voit en outre qu'aucun ensemble linéaire de puissance $2^{\aleph_0}$ n'est une image par fonction de Baire de deux ensembles distincts de la famille F.

M. A. Lindenbaum a déduit récemment de l'hypothèse *H* le théorème suivant [1]):

Etant donnée une famille quelconque F de puissance $2^{\aleph_0}$ *de fonctions d'une variable réelle, il existe* $2^{2^{\aleph_0}}$ *ensembles linéaires de puissance* $2^{\aleph_0}$ *dont aucun ne s'obtient comme image d'aucun autre par aucune fonction appartenant à la famille F.*

Φ étant une famille quelconque d'ensembles linéaires, désignons par $\Psi(\Phi)$ la famille de toutes les images des ensembles de la famille Φ qui s'en obtiennent par des fonctions de Baire. La famille $\Psi(\Phi)$ jouit évidemment de la propriété suivante: toute image par fonction de Baire d'un ensemble de la famille $\Psi(\Phi)$ appartient encore è cette famille. *Le famille* $\Psi(\Phi)$ *constitue donc un invariant envers les transformations par fonctions de Baire.*

Or, considérons une famille d'ensembles F satisfaisant à la proposition C_{73}. Soient Φ_1 et Φ_2 deux sous-familles de F et admettons que $\Phi_1 \neq \Phi_2$. Il existe par conséquent un ensemble $E \in F$ qui appartient à l'une des familles Φ_1 et Φ_2, sans appartenir à l'autre. Soit donc $E \in \Phi_1$ et E *non*-$\in \Phi_2$. En vertu de la proposition C_{73} la première de ces relations donne aussitôt $E \in \Psi(\Phi_1)$ et la deuxième E *non*-$\in \Psi(\Phi_2)$.

L'inégalité $\Phi_1 \neq \Phi_2$ entraîne donc l'inégalité $\Psi(\Phi_1) \neq \Psi(\Phi_2)$, de sorte que les familles $\Psi(\Phi)$ qui viennent correspondre aux différentes sous-familles Φ de F sont différentes elles-mêmes. Comme $\overline{\overline{F}} = \aleph_2$, leur ensemble est de la puissance $2^{\aleph_2}$. Comme chaque famille $\Psi(\Phi)$ est un invariant des transformations par fonctions de Baire, on arrive à cette

Proposition C_{74}. *Il existe une classe de puissance* $2^{\aleph_2}$ *formée de familles différentes d'ensembles linéaires et dont chacune est invariante envers les transformations par fonctions de Baire.*

---

[1]) à paraître dans *Fund. Math.* XXII, 1934.

Il est à remarquer qu'en admettant au lieu de H l'hypothèse (peut-être plus forte) que $2^{2^{\aleph_0}} = \aleph_2$, on tire de C_{74} aussitôt la proposition suivante:

La classe de toutes les familles d'ensembles linéaires, invariantes envers les transformations par fonctions de Baire, est de la puissance $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$ [1]).

§ 7. Ensemble ordonné universel. Conséquences C_{75} et C_{76} de H.

Lemme 1. *Soit U l'ensemble de toutes les suites transfinies A du type Ω*

$$(54) \qquad a_1, a_2, \dots, a_\omega, a_{\omega+1}, \dots, a_\xi, a_{\xi+1}, \dots \qquad (\xi < \Omega)$$

ayant pour éléments a_ξ les nombres 0 ou 1 et telles qu'il existe un $\lambda < \Omega$ pour lequel on ait $\alpha_\lambda = 1$ et $\alpha_\xi = 0$, si $\xi > \lambda$. Supposons l'ensemble U ordonné selon le principe de premières différences.

Dans ces hypothèses, il existe pour chaque suite infinie $A_1, A_2, \dots$ d'éléments de U deux éléments B et C de U tels que l'on a $B \prec A_n \prec C$ pour $n = 1, 2, \dots$

Démonstration. Soit $A_n = \{a_\xi^n\}_{\xi<\Omega}$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ Comme $A_n \in U$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, il existe selon la définition de U pour tout n naturel un indice $\lambda_n < \Omega$ tel que l'on ait $a_{\lambda_n}^n = 1$ et $a_\xi^n = 0$, si $\lambda_n < \xi < \Omega$. Considérons un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ tel que $\lambda > \lambda_n$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ Un tel nombre λ existe, puisqu'on a $\lambda_n < \Omega$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ Posons

$$b_\xi = 0 \quad pour \quad \xi \neq \lambda \quad et \quad b_\lambda = 1,$$

$$c_\xi = 1 \quad pour \quad \xi \leqslant \lambda \quad et \quad c_\xi = 0 \quad pour \quad \xi > \lambda.$$

Soient $B = \{b_\xi\}_{\xi<\Omega}$ et $C = \{c_\xi\}_{\xi<\Omega}$. Etant donné un n naturel quelconque, nous aurons évidemment $b_\xi = 0 \leqslant a_\xi^n$ pour $\xi < \lambda$ et $b_{\lambda_n} = 0 < 1 = a_{\lambda_n}$, puisque $\lambda_n < \lambda$. Il en résulte que $B \prec A_n$.

D'autre part $a_\xi^n \leqslant 1 = c_\xi$ pour $\xi < \lambda$ et $a_\lambda^n = 0 < 1 = c_\lambda$. Il en résulte que $A_n \prec C$, c. q. f. d.

---

[1]) Voir A. Tarski, *Fund. Math.* XVI.

Lemme 2. *Dans les mêmes hypothèses, étant données deux suites infinies* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *et* $B_1, B_2, B_3, \ldots$ *d'éléments de* U *telles que l'on ait* $A_k \prec B_l$ *pour* k *et* l *naturels, il existe toujours un élément* C *de* U *tel que* $A_n \prec C \prec B_n$ *pour* $n = 1, 2, 3, \ldots$

Démonstration. Soit $A_n = \{a_\xi^n\}_{\xi<\Omega}$ et $B_n = \{b_\xi^n\}_{\xi<\Omega}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Nous définirons une suite transfinie auxiliaire $\{u_\xi\}_{\xi<\Omega}$ comme il suit. Posons $u_1 = 1$, s'il existe un n naturel tel que $a_1^n = 1$, et $u_1 = 0$, si l'on a $a_1^n = 0$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Etant donné un nombre ordinal ξ compris entre 1 et Ω, posons $u_\xi = 1$, s'il existe un n naturel tel que l'on ait $a_\eta^n = u_\eta$ pour $\eta < \xi$ et si $a_\xi^n = 1$; enfin, nous poserons $u_\xi = 0$ dans le cas contraire.

La suite $\{u_\xi\}_{\xi<\Omega}$ est ainsi définie par l'induction transfinie. Elle n'appartient pas nécessairement à U, mais toutes les suites A_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) appartenant à U, on voit sans peine (d'après la définition de U) qu'il existe un indice $\lambda < \Omega$ tel que l'on ait $u_\xi = 0$ pour $\lambda < \xi < \Omega$.

En effet, comme $A_n \in U$, il existe pour tout n naturel un nombre ordinal $\lambda_n < \Omega$ tel que $a_\xi^n = 0$ pour $\lambda_n < \xi < \Omega$. Or, il existe un nombre ordinal $\lambda < \Omega$ tel que $\lambda > \lambda_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ et il est évident que l'on a $a_\xi^n = 0$ pour $\lambda < \xi < \Omega$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$, d'où $u_\xi = 0$ pour $\lambda < \xi < \Omega$. De même, comme $B_n \in U$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on voit sans peine qu'il existe un indice $\mu < \Omega$ tel que l'on ait $b_\xi^n = 0$ pour $\mu \leqslant \xi < \Omega$ et $n = 1, 2, 3, \ldots$ Nous pouvons admettre toujours que $\mu > \lambda$.

Posons maintenant $c_\xi = u_\xi$ pour $\xi \neq \mu$ et $c_\mu = 1$; comme $u_\xi = 0$ pour $\lambda < \xi < \Omega$ et comme $\mu < \lambda$, on a $c_\xi = 0$ pour $\mu < \xi < \Omega$ et on voit que la suite transfinie $C = \{c_\xi\}_{\xi<\Omega}$ appartient à U. Reste à montrer que $A_n \prec C \prec B_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Soit à ce but n un nombre naturel donné.

Dans le cas où $A_n \neq \{u_\xi\}_{\xi<\Omega}$, il existe un plus petit nombre ordinal $\gamma < \Omega$ tel que $a_\gamma^n \neq u_\gamma$. On a donc $a_\xi^n = u_\xi$ pour $\xi < \gamma$. Il en résulte tout de suite, en tenant compte de la définition du nombre u_γ et de l'inégalité $a_\gamma^n \neq u_\gamma$, que $a_\gamma^n = 0$ et $u_\gamma = 1$ (puisqu'en supposant que $a_\gamma^n = 1$, on aurait $u_\gamma = 1$, donc $a_\gamma^n = u_\gamma$). Vu la défi-

nition de la suite C, on trouve donc $a_\xi^n = c_\xi$ pour $\xi < \gamma$ et $a_\gamma^n < c_\gamma$ (puisque l'inégalité $\gamma \neq \mu$ entraînerait $c_\gamma = u_\gamma > a_\gamma^n$ et $\gamma = \mu$ donnerait $a_\gamma^n = 0 < 1 = c_\gamma$). Par conséquent $A_n \prec C$. Dans le cas où $A_n = \{u_\xi\}_{\xi<\Omega}$, on a selon la définition de la suite C l'égalité $a_\xi^n = c_\xi$ pour $\xi < \mu$ et $a_\mu^n = u_\mu = 0 < c_\mu = 1$, d'où encore $A_n \prec C$.

Or, si n est un nombre naturel, on ne peut pas avoir $B_n = C$, puisque $b_\mu^n = 0$ et $c_\mu = 1$. Admettons donc que l'on a $B_n \prec C$ pour un indice n: il existe par conséquent un nombre ordinal $\gamma < \Omega$ tel que $b_\xi^n = c_\xi$ pour $\xi < \gamma$, $b_\gamma^n = 0$ et $c_\gamma = 1$; il en résulte que $\gamma \leqslant \mu$, puisqu'on a $c_\xi = 0$ pour $\mu < \xi < \Omega$, donc (d'après la définition de la suite C) que $b_\xi^n = u_\xi$ pour $\xi < \gamma$.

Si $\gamma < \mu$, on a $b_\xi^n = c_\xi = u_\xi$ pour $\xi < \gamma$ et $u_\gamma = c_\gamma = 1$. Vu la définition du nombre u_γ, il existe donc un indice m tel que $a_\xi^m = u_\xi$ pour $\xi < \gamma$ et $a_\gamma^m = 1$. Par conséquent $a_\xi^m = c_\xi = b_\xi^n$ pour $\xi < \gamma$ et $a_\gamma^m = 1 > 0 = b_\gamma^n$, d'où $B_n \prec A_m$, contrairement à l'hypothèse.

On a donc $\gamma = \mu$. Comme $B_n \in U$, il existe par conséquent un indice $\delta < \Omega$ tel que $b_\delta^n = 1$ et $b_\xi^n = 0$ pour $\delta < \xi < \Omega$. Comme $b_\xi^n = 0$ pour $\mu \leqslant \xi < \Omega$, il vient $\delta < \mu$.

On a donc $b_\xi^n = c_\xi = u_\xi$ pour $\xi < \gamma = \mu$ et $u_\delta = b_\delta^n = 1$. Vu la définition du nombre u_δ, il existe en conséquence un indice k tel que $a_\xi^k = u_\xi$ pour $\xi < \delta$ et $a_\delta^k = 1$. Comme $\delta < \mu$, on obtient donc $a_\xi^k = b_\xi^n$ pour $\xi < \delta$, $a_\delta^k = 1 = b_\delta^n$ et $a_\xi^k \geqslant 0 = b_\xi^n$ pour $\delta < \xi < \Omega$, contrairement à la relation $A_k \prec B_n$.

Notre hypothèse qu'on ait $B_n \prec C$ pour un indice n est donc impossible. On a par suite $C \prec B_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, c. q. f. d.

Théorème 7. *Il existe un ensemble ordonné U de puissance du continu et tel que tout ensemble ordonné de puissance $\aleph_1$ est semblable (au sens d'ordre) à un sous-ensemble de U.*

Démonstration. Soit U l'ensemble ordonné de suites, défini dans l'énoncé du lemme 1, p. 141. Etant donné un nombre ordinal quelconque $\xi < \Omega$, désignons par U_ξ le sous-ensemble de U formé de toutes les suites (54) de U pour lesquelles on a $a_\eta = 0$, lorsque $\xi \leqslant \eta < \Omega$. On voit sans peine que $U = \sum_{\xi<\Omega} U_\xi$ et que $\overline{\overline{U_\xi}} \leqslant 2^{\aleph_0}$ pour $\xi < \Omega$. Par conséquent $\overline{\overline{U}} \leqslant \aleph_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

D'autre part, on voit sans peine que $\overline{\overline{U}} \geqslant 2^{\aleph_0}$, puisque toutes les suites (54) dans lesquelles a_n $(n=1, 2, 3, ...)$ est une suite infinie quelconque formée de nombres 0 ou 1, tandis que $a_\omega = 1$ et $a_\xi = 0$ pour $\omega < \xi < \Omega$, appartiennent évidemment à U. On a ainsi $\overline{\overline{U}} = 2^{\aleph_0}$.

Ceci établi, soient

$$(55) \qquad p_1, p_2, p_3, \dots, p_\omega, p_{\omega+1}, \dots, p_\xi, \dots \qquad (\xi < \Omega)$$

un ensemble ordonné quelconque de puissance $\aleph_1$ et

$$(56) \qquad A_1, A_2, A_3, \dots, A_\omega, A_{\omega+1}, \dots, A_\xi \dots$$

une suite transfinie formée de tous les éléments de U.

Posons $f(p_1) = A_1$ et, étant donné un nombre ordinal α compris entre 1 et Ω, définissons $f(p_\alpha)$, comme le premier terme de la suite (56) qui, pour tout indice $\xi < \alpha$, a les mêmes relations d'ordre dans U par rapport à $f(p_\xi)$ que p_α par rapport à p_ξ. On conclut aussitôt des lemmes 1 et 2 qu'un tel élément $f(p_\alpha)$ existe toujours dans la suite (56). Or, on voit sans peine que le sous-ensemble de U formé de tous les éléments de la suite $\{f(p_\xi)\}_{\xi<\Omega}$ ainsi définie est semblable à l'ensemble ordonné (55), c. q. f. d.

Proposition C_{75}. *Il existe un ensemble ordonné U de puissance $2^{\aleph_0}$ tel que tout ensemble ordonné de puissance $2^{\aleph_0}$ est semblable à un sous-ensemble de U* [1]).

L'implication $H \to C_{75}$ est une conséquence immédiate du théorème 7, qui vient d'être établi.

Considérons à présent l'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les suites infinies de nombres naturels et supposons-le ordonné de façon que deux suites $A = \{a_k\}$ et $B = \{b_k\}$ soient en relation $A \prec B$, lorsqu'il existe un i naturel tel que l'on ait $a_k < b_k$ pour tout $k \geqslant i$.

Théorème 8. *Etant donnée une suite infinie de suites des nombres naturels $A^{(1)} = \{a_k^{(1)}\}$, $A^{(2)} = \{a_k^{(2)}\}, \dots, A^{(i)} = \{a_k^{(i)}\}, \dots$, il existe une*

---

[1]) W. Sierpiński, *Fund. Math.* XVIII, p. 280; cf. aussi F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre,* Leipzig 1914, p. 181 et 182.

suite infinie de nombres naturels $B = \{b_k\}$ *telle que l'on a* $A^{(i)} \prec B$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots$

Démonstration. Il suffit de poser pour tout $k = 1, 2, \ldots$

$$b_k = a_k^{(1)} + a_k^{(2)} + \ldots + a_k^{(k)} + 1,$$

pour avoir $b_k > a_k^{(i)}$ à partir de $k \geqslant i$, où i est un nombre naturel arbitrairement donné à l'avance. Par conséquent $A^{(i)} \prec B$ pour $i = 1, 2, \ldots$, c. q. f. d.

Proposition C_{76}. *En convenant pour deux suites infinies de nombres naturels* $A = \{a_k\}$ *et* $B = \{b_k\}$ *d'écrire* $A \prec B$, *lorsqu'il existe un* i *naturel tel que* $a_k < b_k$ *pour* $k \geqslant i$, *l'ensemble* $\mathcal{S}$ *de toutes les suites infinies de nombres naturels contient un ensemble* S *de* $2^{\aleph_0}$ *suites, bien ordonné d'après la relation* $\prec$ *et ayant la propriété suivante: étant donnée une suite infinie quelconque* A *(appartenant ou non à* S*) de nombres naturels, il se trouve dans* S *une suite* B *telle que* $A \prec B$.

Démonstration. Admettons l'hypothèse ***H***. L'ensemble $\mathcal{S}$ de toutes les suites infinies de nombres naturels ayant la puissance $2^{\aleph_0}$, donc $\aleph_1$ d'après ***H***, il existe une suite transfinie du type Ω

$$(54) \qquad A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\omega, A_{\omega+1}, \ldots, A_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

formée de toutes les suites distinctes de $\mathcal{S}$.

Nous définirons par l'induction une suite transfinie de nombres ordinaux $\alpha_\xi < \Omega$ (où $\xi < \Omega$) comme il suit.

Posons $\alpha_1 = 1$. Etant donné un nombre ordinal γ tel que $1 < \gamma < \Omega$, l'ensemble de tous les nombres ordinaux α_ξ où $\xi < \gamma$ est donc au plus dénombrable. Il existe alors, comme on sait, des nombres ordinaux λ tels que l'on ait $\gamma < \lambda < \Omega$ et $\alpha_\xi < \lambda$ pour tout $\xi < \gamma$. Soit λ_γ le plus petit parmi les nombres de ce genre. D'autre part, l'ensemble de toutes les suites A_ξ où $\xi < \lambda_\gamma$ étant au plus dénombrable (puisque $\lambda_\gamma < \Omega$), il existe en vertu du théorème 8 une suite $B \in \mathcal{S}$ telle que l'on ait $A_\xi \prec B$ pour tout $\xi < \lambda_\gamma$. C'est le premier indice avec lequel un tel B figure parmi les termes de la suite transfinie (54) qui est à désigner par α_γ.

La suite transfinie de nombres ordinaux α_ξ ($\xi < \Omega$) est ainsi définie par l'induction transfinie et on a $A_{\alpha_\xi} \prec A_{\alpha_\gamma}$ pour $\xi < \gamma < \Omega$.

Or, soit S l'ensemble de toutes les suites A_{α_ξ} où $\xi < \Omega$. L'ensemble S est donc de puissance $\aleph_1$ et par suite (en vertu de l'hypothèse *H*) de puissance $2^{\aleph_0}$. En même temps, il est bien ordonné selon la relation $\prec$. Enfin, étant donnée une suite infinie quelconque A de nombres naturels, donc un terme $A = A_\gamma$ de la suite transfinie (54), il vient $\gamma < \lambda_\gamma \leqslant \alpha_\gamma < \Omega$ et $A_\gamma \prec A_{\alpha_\gamma}$, d'où $A \prec B$ où $B = A_{\alpha_\gamma}$ appartient par définition à l'ensemble S. Cet ensemble satisfait donc à la proposition C_{76}, c. q. f. d.

Il est à remarquer qu'en s'appuyant sur le théorème 8, on peut établir, sans faire appel à l'hypothèse *H*, l'existence d'un ensemble indénombrable S (de puissance $\aleph_1$) de suites infinies de nombres naturels, bien ordonné d'après la relation $\prec$ [1]). Si l'on envisage les suites de cet ensemble comme points de l'espace (topologique métrisable) à 0 dimensions de Baire, l'espace S jouit de la propriété λ [2]), dont il a été question au Chap. III, § 3, p. 94.

§ 8. Complémentaires d'ensembles analytiques. Conséquences C_{77} et C_{78} de l'hypothèse *H*.

Proposition C_{77}. *Φ étant une famille quelconque de puissance du continu d'ensembles indénombrables (formés d'éléments arbitraires), il existe dans chaque ensemble indénombrable N un sous-ensemble indénombrable N_0 qui ne contient aucun ensemble de la famille Φ.*

Démonstration. Il existe en vertu de l'hypothèse *H* une suite transfinie $\{E_\xi\}_{\xi<\Omega}$ du type Ω formée de tous les ensembles de la famille Φ. Or, l'ensemble N étant indénombrable, il existe une suite transfinie $\{p_\xi\}_{\xi<\Omega}$ du type Ω dont les termes sont des éléments distincts de l'ensemble N.

---

1) Ce résultat est dû à M. G. H. Hardy (voir A. Schoenflies, *Entwickelung der Mengenlehre*, Erste Hälfte, Leipzig 1913, p. 221).

2) Voir N. Lusin, *Fund. Math.* II, p. 155 et C. Kuratowski, *Fund. Math.* XXI, p. 127—128.

Nous allons définir par induction deux suites transfinies: une suite $\{r_\xi\}_{\xi<\Omega}$, où $r_\xi \in E_\xi$ pour $\xi < \Omega$, et une suite $\{s_\xi\}_{\xi<\Omega}$, où $s_\xi \in N$.

Soient à ce but r_1 un élément quelconque de E_1 et s_1 le premier terme de la suite $\{p_\xi\}_{\xi<\Omega}$ qui est distinct de r_1. Etant donné un nombre ordinal α compris entre 1 et Ω, nous définirons r_α comme un élément de E_α qui est distinct de tous les éléments s_ξ où $\xi < \alpha$ (un tel élément r_α existe dans E_α, puisque l'ensemble E_α est indénombrable, tandis que l'ensemble de tous les éléments s_ξ où $\xi < \alpha < \Omega$ est au plus dénombrable) et nous désignerons par s_α le premier terme de la suite $\{p_\xi\}_{\xi<\Omega}$ qui est distinct de tous les éléments r_ξ où $\xi \leqslant \alpha$.

Or, nous allons montrer que l'ensemble N_0 de tous les termes de la suite transfinie $\{s_\xi\}_{\xi<\Omega}$ satisfait à la proposition C_{77}.

En effet, étant donné un nombre ordinal quelconque $\lambda < \Omega$, la définition de l'élément r_λ implique que $r_\lambda \neq s_\xi$ où $\xi < \lambda$ et la définition des éléments s_α entraîne que $s_\alpha \neq r_\lambda$ pour $\lambda \leqslant \alpha$. On a donc $r_\lambda \neq s_\xi$ pour $\xi < \Omega$, d'où r_λ *non*-$\in N_0$. D'autre part, $r_\lambda \in E_\lambda$ et par conséquent $E_\lambda - N_0 \neq 0$. Le nombre ordinal $\lambda < \Omega$ étant arbitraire, on conclut que l'ensemble N_0 ne contient aucun ensemble E_λ où $\lambda < \Omega$, donc aucun ensemble de la famille Φ, c. q. f. d.

L'implication $\boldsymbol{H} \rightarrow \boldsymbol{C}_{77}$ est ainsi démontrée.

La famille de tous les complémentaires analytiques linéaires indénombrables étant, comme on sait, de puissance du continu, la proposition C_{77} entraîne immédiatement la conséquence suivante:

Proposition C_{78}. *Tout ensemble linéaire indénombrable admet un sous-ensemble indénombrable qui ne contient aucun complémentaire analytique indénombrable.*

Il est à remarquer que sans faire usage de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, on montre facilement que *tout ensemble linéaire indénombrable admet un sous-ensemble indénombrable qui ne contient aucun ensemble analytique indénombrable.*

Cependant, sans l'aide de l'hypothèse ***H***, je ne sais pas établir non seulement la proposition C_{78}, mais même la proposition selon laquelle tout complémentaire analytique linéaire indénombrable contiendrait un sous-ensemble qui ne soit pas un complémentaire analytique (problème de M. N. Lusin).

§ 9. Propriétés J et J_c. Conséquence C_{79} de l'hypothèse *H*.

Nous dirons qu'un ensemble linéaire E jouit de la *propriété* **J**, si pour tout sous-ensemble *indénombrable* N de E il existe dans E un ensemble parfait P ayant avec N une infinité indénombrable de points communs. Lorsque des pareils ensembles parfaits P existent dans E pour tout sous-ensemble N de E *de puissance du continu*, nous dirons que E jouit de la *propriété* $\mathbf{J}_c$. Si l'on admet l'hypothèse ***H***, les deux propriétés en question sont donc équivalentes.

Théorème 9. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble linéaire jouisse de la propriété* $\mathbf{J}_c$ *est qu'il soit une somme de moins que* $2^{\aleph_0}$ *ensembles fermés* [1]).

Démonstration. La condition est nécessaire. Soit, en effet, E un ensemble linéaire qui n'est pas une somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles fermés. La famille de tous les ensembles fermés contenus dans E est évidemment de puissance $2^{\aleph_0}$. Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$: il existe donc une suite transfinie du type φ

$$F_1, F_2, F_3, \dots, F_\omega, F_{\omega+1}, \dots, F_\xi, \dots \qquad (\xi < \varphi)$$

formée de tous les sous-ensembles fermés de E.

Parmi les ensembles

$$(55) \qquad F_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} F_\xi \quad où \quad \alpha < \varphi$$

il y a une infinité de puissance $2^{\aleph_0}$ qui sont non vides, puisque dans le cas contraire on aurait pour un $\mu < \varphi$

---

[1]) Voir W. Sierpiński, *Ann. Soc. Polonaise de Math.* VIII (1929), p. 323.

$$F_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} F_\xi = 0 \qquad \textit{pour tout} \quad \alpha \geqslant \mu,$$

ce qui donne, comme on voit sans peine,

$$E = \sum_{\alpha<\varphi} F_\alpha = \sum_{\alpha<\varphi}\Big(F_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} F_\xi\Big) = \sum_{\alpha<\mu}\Big(F_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} F_\xi\Big) = \sum_{\alpha<\mu} F_\alpha$$

et comme $\mu < \varphi$, l'ensemble E serait une somme de $\overline{\mu} < 2^{\aleph_0}$ ensembles fermés, contrairement à l'hypothèse.

Or, considérons un élément dans chacun des ensembles (55) qui n'est pas vide. Nous obtenons ainsi un ensemble N de puissance $2^{\aleph_0}$. On voit sans peine que pour $\alpha < \varphi$ l'ensemble NF_α est de puissance $\leqslant \overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}$. L'ensemble N admettrait donc avec tout sous-ensemble fermé de E moins que $2^{\aleph_0}$ points communs. Par conséquent, l'ensemble E ne jouirait pas de la propriété $\mathbf{J}_c$.

La condition est s u f f i s a n t e. Soit, en effet, E un ensemble linéaire qui est la somme de moins que $2^{\aleph_0}$ ensembles fermés:

$$(56) \qquad E = \sum_{\xi<\mu} F_\xi \qquad \textit{où} \quad \overline{\mu} < 2^{\aleph_0}.$$

Soit N un sous-ensemble de E de puissance du continu. Il existe donc dans la série (56) un terme F_ξ tel que l'ensemble NF_ξ est indénombrable, puisque dans le cas contraire $N = NE$ serait, contrairement à l'hypothèse, de puissance $\leqslant \aleph_0 \overline{\mu} < 2^{\aleph_0}$.

Or, l'ensemble fermé F_ξ étant indénombrable, on a $F_\xi = D_\xi + P_\xi$, où D_ξ est un ensemble au plus dénombrable et P_ξ un ensemble parfait. Comme $NF_\xi = ND_\xi + NP_\xi$, où l'ensemble NF_ξ est non dénombrable, il en est de même de l'ensemble NP_ξ. D'autre part, P_ξ est un sous-ensemble parfait de F_ξ, donc, d'après (56), de E. Ainsi, pour tout sous-ensemble N de E de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe dans E un ensemble parfait P admettant avec N une infinité non dénombrable de points communs. L'ensemble E jouit donc de la propriété $\mathbf{J}_c$, c. q. f. d.

Proposition C_{79}. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble linéaire jouisse de la propriété* **J** *est qu'il soit un* F_σ[1]).

---

[1]) Voir W. H u r e w i c z, *Fund. Math.* XII, p. 106.

L'implication $H \rightarrow C_{79}$ résulte du théorème 9 en vertu de la définition des propriétés **J** et $\mathbf{J}_c$.

Il est à remarquer que sans faire appel à l'hypothèse *H* on peut établir l'existence d'ensembles linéaires qui ne jouissent pas de la propriété $\mathbf{J}_c$. Tels sont p. ex. les ensembles de puissance $2^{\aleph_0}$ qui ne contiennent aucun ensemble parfait.

Or, nous ne savons pas démontrer sans l'hypothèse *H* que l'ensemble $\mathcal{N}$ de tous les nombres irrationnels est dépourvu de la propriété $\mathbf{J}_c$, tandis que cela résulte aussitôt de la conséquence C_{79} de *H*, puisque l'ensemble $\mathcal{N}$ n'est pas un F_σ.

Sans employer l'hypothèse *H*, on peut démontrer aussi qu'aucun ensemble linéaire qui est un complémentaire analytique non mesurable (*B*) ne jouit pas de la propriété **J**. Cependant, on ne sait pas démontrer sans l'hypothèse *H* qu'il existe des ensembles (linéaires) analytiques ne jouissant pas de la propriété **J**.

§ 10. Types de dimensions de M. Fréchet. Conséquence C_{80} de *H*.

Désignons d'une façon générale par dX le type de dimensions (au sens de M. Fréchet) de l'ensemble X[1]).

Théorème 10. *Etant donné un ensemble linéaire E de puissance du continu, il existe toujours un ensemble Q de puissance du continu tel que* $dQ < dE$.

Démonstration. Soient E un ensemble linéaire de puissance du continu et Φ la famille de tous les sous-ensembles de E qui sont homéomorphes à E. On voit sans peine que la famille Φ est de la puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$ et que les ensembles formant Φ ont chacun la puissance $2^{\aleph_0}$. D'après le théorème 1, p. 113 il existe donc deux sous-ensembles disjoints Q et Q_1 de E dont chacun admet au moins un point commun avec tout ensemble de la famille Φ.

Comme $Q \subset E$, il vient $dQ \leqslant dE$. Or, si on avait $dQ = dE$, l'ensemble Q contiendrait un ensemble E_1 homéomorphe à E.

---

[1]) Cf. plus haut Chap. III, § 4, p. 99.

Comme $E_1 \subset Q \subset E$, l'ensemble E_1 serait donc en vertu de la définition de la famille Φ un ensemble de cette famille et on aurait par conséquent $Q_1 E_1 \neq 0$. Mais c'est impossible, puisque $E_1 \subset Q$ et $QQ_1 = 0$.

Ainsi l'égalité $dQ = dE$ implique contradiction. Par conséquent $dQ < dE$, c. q. f. d.

Proposition C_{80}. *Parmi les types de dimensions de M. Fréchet d'ensembles linéaires indénombrables il n'y a aucun qui soit le plus petit* [1]).

L'implication $H \rightarrow C_{80}$ est une conséquence immédiate du théorème 10.

---

[1]) Voir C. Kuratowski et W. Sierpiński, *Fund. Math.* VIII, p. 200.

CHAPITRE V.

Hypothèse des alephs inaccessibles.

Un aleph $\aleph_\alpha$ est dit *inaccessible*, s'il est régulier, c. à d. qu'il n'est pas une somme de moins que $\aleph_\alpha$ nombres cardinaux dont chacun est $< \aleph_\alpha$, et si, en même temps, son indice α est un nombre ordinal de deuxième espèce (nombre-limite). On ignore s'il existe des alephs inaccessibles [1]; en tout cas il résulte de l'hypothèse ***H*** que l'on a la proposition suivante:

Proposition C_{81}. *Il n'existe aucun aleph inaccessible qui ne dépasse* $2^{\aleph_0}$.

La proposition C_{81} est d'ailleurs une conséquence des hypothèses moins restrictives que l'hypothèse ***H***: elle résulte p. ex. de l'hypothèse $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_\Omega$.

En effet, distinguons deux cas:

1° $2^{\aleph_0} < \aleph_\Omega$. Dans ce cas $\aleph_\alpha \leqslant 2^{\aleph_0}$ entraîne $\aleph_\alpha < \aleph_\Omega$, donc $\alpha < \Omega$. Comme un nombre de seconde espèce, α est par conséquent confinal avec ω, de sorte que $\aleph_\alpha$ est une somme de $\aleph_0$ nombres cardinaux dont chacun est inférieur à $\aleph_\alpha$ et par suite $\aleph_\alpha$ n'est pas un aleph inaccessible.

2° $2^{\aleph_0} = \aleph_\Omega$. Dans ce cas $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_0}$ entraîne $\aleph_\alpha < \aleph_\Omega$ et on en conclut, comme dans le cas 1°, que $\aleph_\alpha$ n'est pas un aleph inac-

---

[1]) Cf. F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914, p. 131, W. Sierpiński, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928, p. 226; cf. aussi W. Sierpiński et A. Tarski, *Fund. Math.* XV, p. 292.

cessible. Or, si $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$, on a $\aleph_\alpha = \aleph_\Omega = \sum_{\xi<\Omega} \aleph_\xi$ et $\aleph_\alpha$ est une somme de $\aleph_1$, donc de moins que $\aleph_\alpha$, nombres cardinaux inférieurs à $\aleph_\alpha$, ce qui prouve que $\aleph_\alpha$ n'est pas un aleph inaccessible.

On démontre que la condition nécessaire (mais non suffisante) pour que $\aleph_\alpha$ soit un aleph inaccessible est qu'on ait $\alpha = \omega_\alpha$ où ω_α désigne le plus petit nombre ordinal de puissance $\aleph_\alpha$ [1]).

On en conclut sans peine que la proposition C_{81} résulte de l'hypothèse $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_{\omega_\omega}$ et aussi de l'hypothèse que $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_{\omega_\zeta}$ où $\zeta = \omega + \omega_\omega + \omega_{\omega_\omega} + \ldots$ (ζ étant le plus petit nombre ordinal satisfaisant à l'équation $\zeta = \omega_\zeta$). Si la proposition C_{81} était fausse, la puissance du continu occuperait donc dans l'échelle des alephs un rang si élevé qu'il est difficile de s'en faire une idée.

Or, l'hypothèse C_{81} permet de déduire plusieurs propositions importantes qu'on ne savait démontrer auparavant qu'à l'aide de l'hypothèse ***H***. Nous en donnerons ici quelques exemples.

Lemme 1 (de M. S. Ulam [2])). *T étant un ensemble de puissance $\aleph_{\alpha+1}$* (où α est un nombre ordinal donné $\geqslant 0$), *il existe un système d'ensembles $A^\xi_\eta \subset T$, où $\xi < \omega_\alpha$ et $\eta < \omega_{\alpha+1}$, tel que:*

1° $A^\xi_\eta A^\xi_\zeta = 0$ *pour* $\xi < \omega_\alpha$ *et* $\eta < \zeta < \omega_{\alpha+1}$

2° $A^\xi_\eta A^\zeta_\eta = 0$ *pour* $\xi < \zeta < \omega_\alpha$ *et* $\eta < \omega_{\alpha+1}$,

3° *l'ensemble* $T - \sum_{\xi<\omega_\alpha} A^\xi_\eta$ *est de puissance* $\leqslant \aleph_\alpha$ *pour* $\eta < \omega_{\alpha+1}$.

Démonstration. L'ensemble T étant de puissance $\aleph_{\alpha+1}$, nous pouvons regarder ses éléments comme termes d'une suite transfinie p_λ où $\omega_\alpha < \lambda < \omega_{\alpha+1}$.

Soit λ un nombre ordinal tel que $\omega_\alpha < \lambda < \omega_{\alpha+1}$. L'ensemble de tous les nombres ordinaux $< \lambda$ est de puissance $\aleph_\alpha$ et nous pouvons les supposer rangés en une suite transfinie du type ω_α, soit $\{\varphi^\lambda_\xi\}$ où $\xi < \omega_\alpha$.

---

[1]) Voir p. ex. mon livre précité, p. 226.

[2]) *Fund. Math.* XVI, p. 142—143.

Désignons pour $\xi < \omega_\alpha$ et $\eta < \omega_{\alpha+1}$ par A^ξ_η l'ensemble de tous les éléments p_λ où $\varphi^\lambda_\xi = \eta$. Si $p_\lambda \in A^\xi_\eta A^\xi_\zeta$, on a donc $\varphi^\lambda_\xi = \eta$ et $\varphi^\lambda_\xi = \zeta$, d'où $\eta = \zeta$. Or, si $p_\lambda \in A^\xi_\eta A^\zeta_\eta$, on a $\varphi^\lambda_\xi = \eta$ et $\varphi^\lambda_\zeta = \eta$, donc $\varphi^\lambda_\xi = \varphi^\lambda_\zeta$, ce qui donne $\xi = \zeta$, en vertu de la définition de la suite φ^λ_ξ. Le système d'ensembles $\{A^\xi_\eta\}$ jouit donc des propriétés 1⁰ et 2⁰.

Etant donné maintenant un nombre ordinal $\eta < \omega_{\alpha+1}$, considérons un nombre ordinal λ tel que $\omega_\alpha < \lambda < \omega_{\omega+1}$ et $\lambda > \eta$. D'après la définition de la suite $\{\varphi^\lambda_\xi\}$ où $\xi < \omega_\alpha$ il existe un nombre ordinal $\xi < \omega_\alpha$ tel que $\varphi^\lambda_\xi = \eta$. D'après la définition de l'ensemble A^ξ_η on a par conséquent $p_\lambda \in A^\xi_\eta$, d'où $p_\lambda \in \sum_{\xi < \omega_\alpha} A^\xi_\eta$ pour les indices λ qui satisfont aux inégalités $\omega_\alpha < \lambda < \omega_{\alpha+1}$ et $\lambda < \eta$. Il en résulte que la puissance de l'ensemble $T - \sum_{\xi < \omega_\alpha} A^\xi_\eta$ est $\leqslant \overline{\eta} \leqslant \aleph_\alpha$ (puisque $\eta < \omega_{\alpha+1}$). La propriété 3⁰ du système d'ensembles $\{A^\xi_\eta\}$ est donc aussi réalisée, c. q. f. d.

Ceci établi, envisageons la propriété suivante d'un ensemble infini Q formé d'éléments quelconques:

Propriété U. *Etant donnée une famille arbitraire Φ de sous-ensembles de Q, assujettie à la condition:*

($\varDelta$) *toute famille de sous-ensembles disjoints (non vides) de Q qui appartiennent à Φ est au plus dénombrable,*

il existe une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ de sous-ensembles de Q n'appartenant pas à la famille Φ et tels que l'ensemble $Q - \sum_{n=1}^{\infty} E_n$ est au plus dénombrable [1]).

Lemme 2. *Si tout ensemble Q de puissance $\aleph_\alpha$ où $\alpha \geqslant 0$ jouit de la propriété* **U**, *il en est autant de tout ensemble Q de puissance $\aleph_{\alpha+1}$.*

---

[1]) En admettant l'hypothèse H. nous avons démontré la propriété **U** pour tout ensemble Q de nombres réels (voir Chap. IV, § 2, p. 106, proposition C_{52}).

D é m o n s t r a t i o n. Admettons que la propriété **U** se présente pour tout ensemble de puissance $\aleph_\alpha$ et considérons un ensemble Q de puissance $\aleph_{\alpha+1}$. Soit Φ une famille de sous-ensembles de Q assujettie à la condition (Δ). Soit $\{A_\eta^\xi\}$ le système d'ensembles satisfaisant aux conditions 1^0-3^0 du lemme 1.

Nous allons établir d'abord l'existence d'un indice $\zeta < \omega_{\alpha+1}$ tel qu'aucun ensemble A_ζ^ξ, où $\xi < \omega_\alpha$, n'appartient à Φ. En effet, supposons qu'il n'en est pas ainsi: il existe alors pour tout indice $\eta < \omega_{\alpha+1}$ un indice $\xi_\eta < \omega_\alpha$ tel que l'ensemble $A_\eta^{\xi_\eta}$ appartient à Φ. Or, l'ensemble de tous les indices $\eta < \omega_{\alpha+1}$ étant de puissance $\aleph_{\alpha+1}$ et celui de tous les indices $\xi_\eta < \omega_\alpha$ étant de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$, on voit sans peine qu'il existe un indice $\xi < \omega_\alpha$ tel que $\xi_\eta = \xi$ pour une infinité non dénombrable d'indices différents $\eta < \omega_{\alpha+1}$ (puisque $\aleph_0 \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$). Or, c'est impossible, les ensembles $A_\eta^\xi = A_\eta^{\xi_\eta}$ étant disjoints (pour des valeurs distinctes de η) et appartenant à Φ.

Posons

$$(1) \qquad R = Q - \sum_{\xi < \omega_\alpha} A_\zeta^\xi.$$

En vertu de la condition 3^0 du lemme 1, c'est un ensemble de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$. Soit Q_1 l'ensemble dont les éléments sont les ensembles A_η^ξ où $\xi < \omega_\alpha$ et les ensembles formés d'un seul élément (quelconque) de R. L'ensemble Q_1 est évidemment de puissance $\aleph_\alpha$ (comme somme d'un ensemble de puissance $\leqslant \aleph_\alpha$ et d'un ensemble de puissance $\aleph_\alpha$) et ses éléments sont des sous-ensembles d i s j o i n t s de Q.

Etant donné un sous-ensemble quelconque E de Q_1, désignons d'une façon générale par S_E la somme de tous les sous-ensembles de Q qui sont des éléments de E; d'après (1) et selon la définition de l'ensemble Q_1 il vient alors:

$$(2) \qquad Q = S_{Q_1}.$$

Convenons de ranger un sous-ensemble E de Q_1 dans la famille Φ_1, lorsque l'ensemble $S_E\ (\subset Q)$ appartient à la famille Φ et seulement dans ce cas. On voit sans peine que toute famille

d'ensembles disjoints et appartenant à Φ_1 est au plus dénombrable, puisque si E' et E'' sont deux ensembles disjoints appartenant à Φ_1, les ensembles $S_{E'}$ et $S_{E''}$ sont des sous-ensembles disjoints de Q appartenant à Φ et toute famille d'ensembles disjoints de la famille Φ est au plus dénombrable par hypothèse.

Or, la propriété **U** étant admise pour tous les ensembles de la puissance $\aleph_\alpha$ et Q_1 étant de puissance $\aleph_\alpha$, on en conclut qu'il existe une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ d'ensembles n'appartenant pas à Φ_1 et tels que l'ensemble

$$R_1 = Q_1 - \sum_{n=1}^{\infty} E_n \tag{3}$$

est au plus dénombrable. Il en résulte tout de suite que l'on a

$$S_{Q_1} = S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n},$$

d'où selon (2):

$$Q = S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n}. \tag{4}$$

Or, l'ensemble (3) est au plus dénombrable et les éléments du sous-ensemble R_1 de Q_1 sont soit des ensembles A_ζ^ξ qui n'appartiennent pas à la famille Φ, soit des ensembles formés d'un seul élément de Q. Donc

$$S_{R_1} = D + H_1 + H_2 + H_3 \ldots, \tag{5}$$

où D est un ensemble au plus dénombrable d'éléments de Q et $H_1 + H_2 + H_3 + \ldots$ est une série finie ou dénombrable d'ensembles n'appartenant pas à Φ. On tire de (4) et (5):

$$Q = D + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n} + H_1 + H_2 + H_3 + \ldots \tag{6}$$

Les ensembles E_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) n'appartenant pas à Φ_1, les ensembles S_{E_n} n'appartiennent pas à Φ. La formule (6) prouve donc que Q est une somme d'un ensemble au plus dénombrable et d'une infinité dénombrable d'ensembles n'appartenant pas à Φ. Ainsi l'ensemble Q jouit de la propriété **U**, c. q. f. d.

Lemme 3. *Si $\aleph_\alpha$ est un aleph accessible et si tous les ensembles Q de puissance $< \aleph_\alpha$ jouissent de la propriété* **U**, *il en est encore de même pour les ensembles de puissance $\aleph_\alpha$.*

Démonstration. En vertu du lemme 2, nous pouvons supposer que l'indice α est un nombre ordinal de seconde espèce. L'aleph $\aleph_\alpha$ n'étant pas inaccessible, on a

$$\aleph_\alpha = \sum_{\xi<\beta} \aleph_{\alpha_\xi} \quad \textit{où} \quad \aleph_{\alpha_\xi} < \aleph_\alpha \qquad \textit{pour} \quad \xi < \beta \quad \textit{et} \quad \overline{\beta} < \aleph_\alpha.$$

Admettons que la propriété **U** se présente pour tout ensemble de puissance $< \aleph_\alpha$ et considérons un ensemble Q de puissance $\aleph_\alpha$. Nous pouvons poser, comme on voit sans peine:

$$Q = \sum_{\xi<\beta} T_\xi, \tag{7}$$

où $\overline{\overline{T}}_\xi < \aleph_{\alpha_\xi}$ et $T_\xi T_\zeta = 0$ pour $\xi < \zeta < \beta$.

Soit Φ_1 une famille des sous-ensembles de Q assujettie à la propriété (Δ). Les ensembles T_ξ (où $\xi < \beta$) qui appartiennent à la famille Φ_1 sont donc en nombre fini ou en infinité dénombrable. Soit $T_{\xi_1}, T_{\xi_2}, T_{\xi_3}, \ldots$ la suite de ces derniers. Les ensembles T_ξ où $\xi < \beta$ et $\xi \neq \xi_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) n'appartiennent donc pas à la famille Φ_1; en conséquence leur ensemble est évidemment de puissance $\overline{\beta} - \aleph_0 = \overline{\beta} < \aleph_\alpha$.

Soit Q_1 l'ensemble (de puissance $\overline{\beta}$) dont les éléments sont des ensembles T_ξ où $\xi < \beta$ et $\xi \neq \xi_n$ (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$).

Convenons de ranger un sous-ensemble E de Q_1 dans la famille Φ, si la somme S_E de tous les sous-ensembles de Q qui sont des éléments de E appartient à Φ_1. Les éléments de Q_1 étant des sous-ensembles disjoints de Q, on voit sans peine (d'après l'hypothèse sur la famille Φ) que toute famille de sous-ensembles disjoints de Q_1 qui appartiennent à la famille Φ est au plus dénombrable. Comme $\overline{\overline{Q}}_1 = \overline{\beta} < \aleph_\alpha$ et comme tous les ensembles de puissance $< \aleph_\alpha$ jouissent par hypothèse de la propriété **U**, il existe une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ de sous-ensembles de Q_1 n'appartenant

pas à la famille Φ et tels que l'ensemble (3) est au plus dénombrable. Comme plus haut, on trouve la formule $S_{Q_1} = S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n}$.

Or, la définition de l'ensemble Q_1 entraîne selon (7) que

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} T_{\xi_n} + S_{Q_1},$$

d'où par substitution

$$(8) \qquad Q = S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n} + \sum_{n=1}^{\infty} T_{\xi_n},$$

Soit maintenant n un indice naturel quelconque. Comme $T_{\xi_n} \subset Q$, toute famille de sous-ensembles disjoints de T_{ξ_n} qui appartiennent à la famille Φ_1 est au plus dénombrable. Comme $\overline{\overline{T}}_{\xi_n} = \aleph_{\xi_n} < \aleph_\alpha$ et comme les ensembles de puissance $< \aleph_\alpha$ jouissent par hypothèse de la propriété **U**, il existe une suite infinie $E_1^n, E_2^n, E_3^n, \ldots$ de sous-ensembles T_{ξ_n} (donc de sous-ensembles de Q) tels que l'ensemble

$$(9) \qquad H_n = T_{\xi_n} - \sum_{n=1}^{\infty} E_k^n$$

est au plus dénombrable.

Comme $E_k^n \subset T_{\xi_n}$, on tire de (9)

$$T_{\xi_n} = H_n + \sum_{k=1}^{\infty} E_k^n \qquad \textit{pour} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

et la formule (8) donne

$$Q = S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} S_{E_n} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} E_k^n.$$

L'ensemble $S_{R_1} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n$ étant au plus dénombrable et les ensembles E_k^n et S_{E_n} (n et k naturels) n'appartenant pas à la famille Φ, on en conclut que l'ensemble Q jouit de la propriété **U**, c. q. f. d.

La propriété **U** appartenant évidemment à tous les ensembles dénombrables, les lemmes 2 et 3 impliquent par l'induction transfinie ce

Théorème[1]. *S'il n'existe aucun aleph inaccessible* $\leqslant \mathfrak{m}$ *où* $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, *tous les ensembles de puissance* $\mathfrak{m}$ *jouissent de la propriété* **U**.

Ainsi, pour le cas particulier où $\mathfrak{m} = 2^{\aleph_0}$, la proposition C_{81} entraîne aussitôt en vertu du théorème qui précède (et sans d'autres hypothèses) la proposition C_{52}, p. 106, donc aussi les propositions $C_{53} - C_{57}$, qui sont des conséquences de C_{52} (voir Chap. IV, § 3). La proposition C_{53} constitue, comme il a été déjà observé p. 107, la solution négative de l'ainsi dit *problème généralisé de la mesure*. Or, l'implication $C_{81} \rightarrow C_{52} \rightarrow C'_{55}$ nous permet, en outre, de déduire de l'hypothèse C_{81} (sans aucune autre hypothèse) la proposition qui suit:

Proposition C_{82}[2]. *Tout ensemble linéaire qui est de deuxième catégorie de Baire dans tout intervalle contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints dont chaucun est de deuxième catégorie de Baire dans tout intervalle.*

Démonstration. En admettant la proposition C_{55}, nous allons démontrer d'abord que, étant donné un ensemble linéaire M qui est de deuxième catégorie dans tout intervalle, il existe dans tout intervalle I un ensemble Q de deuxième catégorie contenu dans MI et tel que $M - Q$ est encore un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle.

En effet, l'ensemble MI (en tant qu'un ensemble de deuxième catégorie) contient en vertu de la proposition C_{55} une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints, dont chacun est de deuxième catégorie: soit Φ leurs famille.

Considérons un ensemble $E \in \Phi$. En tant qu'un ensemble de deuxième catégorie, l'ensemble E est, comme on sait, de deuxième catégorie en tout point d'un certain intervalle J aux extrémités rationnelles (et qui dépend de E). La famille de tous les intervalles aux extrémités rationnelles étant dénombrable et la famille Φ

---

[1] W. Sierpiński, *Fund. Math.* XX, p. 214.

[2] W. Sierpiński, *Fund. Math.* XXII, p. 1. Cf. le problème de M. C. Kuratowski, *Fund. Math.* IV, p. 368, problème 21.

étant non dénombrable, il existe un intervalle J_0 aux extrémités rationnelles tel qu'une infinité non dénombrable d'ensembles de la famille Φ sont de deuxième catégorie en tout point de J_0. Soient E_0 et E_1 deux ensembles de ce genre.

Posons $Q = J_0 E_0$: nous aurons évidemment $Q \subset I$, puisque $E_0 \subset IM \subset I$. L'ensemble Q est donc de deuxième catégorie et on a $M - Q = (M - J_0) + (MJ_0 - Q) = (M - J_0) + J_0(M - E_0) \supset (M - J_0) + J_0 E_1$, puisque $M - E_0 \supset E_1$, car E_0 et E_1 sont disjoints. Vu la propriété de l'ensemble M (et E_1 étant de deuxième catégorie en tout point de l'intervalle J_0), l'ensemble $M - Q$ est donc de deuxième catégorie dans tout intervalle.

Ceci établi, considérons un ensemble linéaire E qui est de deuxième catégorie dans tout intervalle. Soit

$$I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n, \ldots \tag{10}$$

une suite infinie formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles.

Nous définirons par induction une suite infinie de sous-ensembles disjoints de l'ensemble E comme il suit.

En posant $M = E$, il existe, d'après ce qui vient d'être démontré pour M, un ensemble Q_1 de deuxième catégorie contenu dans EI_1 et tel que $E - Q_1$ est un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle. De même, étant donné un nombre naturel $n > 1$, admettons que $E - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-1})$ est un ensemble de deuxième catégorie dans tout intervalle. D'après ce qui a été établi pour M, il existe (en posant $M = E - \sum_{i=1}^{n-1} Q_i$) un ensemble Q_n de deuxième catégorie contenu dans $[E - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-1})]\, I_n$ et tel que l'ensemble

$$[E - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_{n-1})] - Q_n = E - (Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n)$$

est de deuxième catégorie dans tout intervalle.

La suite infinie d'ensembles $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ est ainsi définie par l'induction et ce sont évidemment des ensembles disjoints de deuxième catégorie. De plus, on a $Q_n \subset I_n E$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$

Or, en vertu de la proposition C_{55}, l'ensemble Q_n contient une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints de deuxième catégorie. Désignons en $\aleph_1$ ensembles par Q_n^ξ où ξ parcourt tous les nombres ordinaux $< \Omega$. On a donc

$$(11) \quad Q_n^\xi \subset Q_n \subset I_n E \qquad pour \quad \xi < \Omega \quad et \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

et

$$(12) \quad Q_n^\xi Q_n^\eta = 0 \qquad pour \quad \xi < \eta < \Omega \quad et \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Posons pour tout nombre ordinal $\xi < \Omega$

$$(13) \qquad E^\xi = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^\xi.$$

L'ensemble Q_n^ξ étant de deuxième catégorie et, d'après (11), contenu dans I_n, et la suite (10) étant formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles, on conclut de (13) que l'ensemble E^ξ est de deuxième catégorie dans tout intervalle, quel que soit le nombre ordinal $\xi < \Omega$. D'autre part, on a selon (11) et (13) $E^\xi \subset E$ pour $\xi < \Omega$. Or, les ensembles $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$ étant disjoints, il résulte de (11) que $Q_m^\xi Q_n^\eta = 0$ pour $m \neq n$, $\xi < \Omega$ et $\eta < \Omega$. Moyennant (12) la formule (13) donne donc

$$E^\xi E^\eta = 0 \qquad pour \quad \xi < \eta < \Omega.$$

Ainsi, les ensembles E^ξ ($\xi < \Omega$) sont disjoints, contenus dans E et chacun d'eux est de deuxième catégorie dans tout intervalle.

L'implication $C_{55} \to C_{82}$ et par conséquent l'implication $C_{81} \to C_{82}$ est donc démontrée, sans avoir recours à aucune autre hypothèse.

CHAPITRE VI.

Hypothèse du continu et les exemples effectifs.

Les exemples d'ensembles dont nous ne savons pas démontrer l'existence qu'en admettant l'hypothèse H sont, *en général,* non effectifs [1]. Or, il y a des cas où nous savons définir *effectivement* des ensembles jouissant de certaines propriétés, mais seulement en admettant l'hypothèse H. Tel est p. ex. l'exemple effectif d'un ensemble ordonné de puissance $> 2^{\aleph_0}$, formé de fonctions d'une variable réelle. Voici comment on peut définir d'une manière effective un tel ensemble, en admettant l'hypothèse H.

Selon une idée de M. Lebesgue, on sait décomposer effectivement l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous les nombres réels en $\aleph_1$ ensembles disjoints non vides

(1) $$E = \sum_{\xi < \Omega} E_\xi \text{ [2]}.$$

[1] La notion d'*effectivité* — écrit M. C. Kuratowski (*Topologie I,* p. 109) — est de nature *méta-mathématique*: elle concerne le mode de démonstration des théorèmes d'existence. On dit notamment qu'un théorème d'existence est démontré d'une façon *effective,* lorsqu'on a *défini* un individu a et on a démontré que a satisfait au théorème considéré. Cf. aussi à ce sujet: F. Bernstein, Leipz. Ber. 60 (1908) et *Götting. Nachr.* 1904, p. 558; W. Sierpiński, *Fund. Math.* II, p. 112; B. Knaster et C. Kuratowski, *Fund. Math.* II, p. 251 et A. Lindenbaum, *Ann. Soc. Pol. Math.* 10 (1931), p. 118.

[2] H. Lebesgue, *Journ. de Math.* I, 1905, p. 213; voir aussi mon livre *Leçons sur les nombres transfinis,* Paris 1928, p. 209.

Soit S l'ensemble de toutes les suites transfinies du type Ω

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_\omega, a_{\omega+1}, \dots, a_\xi, \dots \qquad (\xi < \Omega)$$

formées de nombres 0 et 1. L'ensemble S est évidemment de la puissance $2^{\aleph_1}$. Ordonnons le d'après le principe de premières différences et, étant donnée une suite transfinie $\sigma = \{a_\xi\}_{\xi<\Omega}$ appartenant à l'ensemble S, posons

$$X_\sigma = \sum_{\xi<\Omega} a_\xi E_\xi$$

où $a_\xi E_\xi$ désigne l'ensemble vide, si $a_\xi = 0$, et l'ensemble E_ξ, si $a_\xi = 1$. Les ensembles E_ξ $(\xi < \Omega)$ étant non vides et disjoints, on voit sans peine que $\sigma_1 \neq \sigma_2$ entraîne $X_{\sigma_1} \neq X_{\sigma_2}$.

Désignons maintenant par $f_\sigma(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble X_σ. L'ensemble U de toutes les fonctions distinctes $f_\sigma(x)$ correspondant aux suites transfinies distinctes σ de S est donc de puissance $\overline{\overline{S}} = 2^{\aleph_1}$ et il devient ordonné, si l'on convient de poser $f_{\sigma_1} \prec f_{\sigma_2}$, lorsqu'on a $\sigma_1 \prec \sigma_2$ dans S. Nous avons ainsi défini effectivement un ensemble ordonné U formé de $2^{\aleph_1}$ fonctions (distinctes) d'une variable réelle.

Or, si l'on admet l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, on a $2^{\aleph_1} > \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$. Dans ce cas U est donc un ensemble ordonné de puissance $> 2^{\aleph_0}$, formé de fonctions d'une variable réelle. Ainsi, *en admettant l'hypothèse* $\boldsymbol{H}$ *on peut définir effectivement un ensemble ordonné de puissance* $> 2^{\aleph_0}$, *formé de fonctions d'une variable réelle.*

Notons que l'ensemble U est effectivement défini (et ordonné) sans faire usage de l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, mais la démonstration que l'ensemble U est de puissance $> 2^{\aleph_0}$ exige cette hypothèse.

Il est à remarquer que s'il s'agissait seulement de démontrer l'*existence* (sans en donner un exemple effectif) d'un ensemble ordonné de puissance $> 2^{\aleph_0}$ qui soit formé de fonctions d'une variable réelle, on pourrait le faire sans l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, notamment en ne s'appuyant que sur le théorème de bon ordre de M. Zermelo.

En effet, d'après le théorème de M. Zermelo, il existe un ensemble même bien ordonné, formé de toutes les fonctions d'une

variable réelle, et un tel ensemble est, comme on sait, de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, donc de puissance $> 2^{\aleph_0}$.

L'existence effective de la décomposition (1) implique aussitôt qu'*en admettant l'hypothèse **H** on peut définir effectivement un ensemble bien ordonné de puissance du continu, formé de fonctions d'une variable réelle.*

Dans la théorie des ensembles analytiques on montre en outre qu'en admettant l'hypothèse ***H***, on peut définir effectivement un ensemble bien ordonné de puissance $2^{\aleph_0}$, formé de fonctions de Baire (d'une variable réelle) et dont les classes croissent d'une manière monotone [1]. Or, même en admettant l'hypothèse ***H***, nous ne savons pas définir effectivement aucun ensemble bien ordonné indénombrable, formé de fonctions de Baire de classes finies (ou, plus généralement, de classes bornées par un nombre $\alpha < \Omega$).

Il est à remarquer que sans l'hypothèse ***H*** on sait parfois définir effectivement un ensemble de nombres réels E et démontrer qu'il n'est pas vide, sans qu'on sache toutefois définir effectivement aucun élément de E, sinon qu'en admettant l'hypothèse ***H*** [2].

En effet, soit U un ensemble analytique universel, donné sur le plan, p. ex. l'ensemble construit par M. Lusin [3]. On obtient chaque complémentaire analytique linéaire, en coupant le complémentaire de U (par rapport au plan) avec une parallèle à l'axe OY.

Désignons par M l'ensemble de tous les nombres réels a tels que la droite $x = a$ coupe le complémentaire U en un ensemble indénombrable de puissance $< 2^{\aleph_0}$ et par E l'ensemble égal à M, si l'ensemble M n'est pas vide, et égal à l'ensemble formé de nombre 0 seul, si l'ensemble M est vide.

---

[1]) Voir N. Lusin, *Annali Scuola Norm. Pisa,* Ser. II, Vol. II, p. 271.

[2]) Cf. W. Sierpiński, *Sur les ensembles de points qu'on sait définir effectivement,* Verh. des Intern. Math. Kongr. Zürich 1932, Bd. I, p. 281.

[3]) *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications,* Paris 1930, p. 146.

L'ensemble E est ainsi défini d'une manière effective et il est non vide (ce qui est évident sans avoir recours ni à l'hypothèse $\boldsymbol{H}$, ni à l'axiome du choix).

Cependant, nous ne savons nommer effectivement aucun élément de E, sinon en admettant l'hypothèse $\boldsymbol{H}$. Si l'hypothèse $\boldsymbol{H}$ est vraie, l'ensemble M est évidemment vide et le nombre 0 est un élément de l'ensemble E.

CHAPITRE VII.

Hypothèse du continu généralisée.

On entend par *hypothèse du continu généralisée* ou par „hypothèse de Cantor sur les alephs" l'hypothèse G [1]) suivante:

G. *Etant donné un nombre cardinal quelconque* $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, *il n'existe aucun nombre cardinal* $\mathfrak{n}$ *tel que* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$.

On ignore jusqu'à présent si l'hypothèse G est vraie ou fausse, ou indépendante des axiomes de la Théorie des ensembles [2]). Nous allons montrer (à l'aide de l'axiome du choix) que l'hypothèse G équivaut à la proposition G^* suivante:

G^* [3]). *Etant donné un nombre ordinal quelconque* α, *on a*

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}.$$

1⁰ $G \to G^*$. Soit α un nombre ordinal donné. On a $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}$ et $\aleph_\alpha < 2^{\aleph_\alpha}$. Or, il n'existe, comme on sait, aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que l'on ait $\aleph_\alpha < \mathfrak{n} < \aleph_{\alpha+1}$. L'inégalité $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_{\alpha+1}$ est donc impossible et l'axiome du choix impliquant, comme on sait, la trichotomie, on en conclut que l'on a $\aleph_{\alpha+1} \leqslant 2^{\aleph_\alpha}$.

---

[1]) que M. F. Hausdorff (*Math. Ann.* 65, 1908, p. 494) énonce d'une façon différente, mais équivalente à G (cf. A. Tarski, *Fund. Math.* VII, p. 10, renvoi [1])).

[2]) A. Tarski, l. c., p. 10.

[3]) A. Lindenbaum et A. Tarski, *C. R. Soc. Sc. de Varsovie* XIX (1926), p. 313.

Si on avait $\aleph_{\alpha+1} < 2^{\aleph_\alpha}$, on aurait $\aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1} < 2^{\aleph_\alpha}$, contrairement à l'hypothèse G. On a donc bien $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$, c. à d. l'hypothèse G^*.

2⁰ $G^* \rightarrow G$. Soit $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ un nombre cardinal arbitraire. Il résulte de l'axiome du choix que $\mathfrak{m}$ est un aleph. Soit $\mathfrak{m} = \aleph_\alpha$. En vertu de G^* on a donc $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\mathfrak{m}}$. Or, il n'existe, comme on sait, aucun nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que $\aleph_\alpha < \mathfrak{n} < \aleph_{\alpha+1}$, c. à d. que $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$. On obtient donc l'hypothèse G, c. q. f. d.

MM. Lindenbaum et Tarski ont démontré[1]) que l'hypothèse G équivaut à l'affirmation simultanée (produit logique) de la proposition G^* et de l'axiome du choix.

En outre, chacune des trois propositions suivantes équivaut à l'hypothèse G[2]):

Proposition P^1. *Si $\aleph_\alpha$ n'est pas une somme de $\aleph_\beta$ nombres cardinaux plus petits que $\aleph_\alpha$, donc $(\alpha > \beta)$, on a $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha$.*

Proposition P^2. *Si $\alpha \geqslant \beta$ et $\aleph_\alpha$ est une somme de $\aleph_\beta$ nombres cardinaux inférieurs à $\aleph_\alpha$, on a $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1}$.*

Proposition P^3. *Si $\alpha < \beta$, on a $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \aleph_{\beta+1}$.*

Une des plus faciles conséquences de l'hypothèse G est la suivante:

Proposition C^1. *L'inégalité $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ entraîne l'inégalité $2^{\mathfrak{m}} < 2^{\mathfrak{n}}$.*

En effet, $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ étant deux nombres cardinaux tels que $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, on a $2^{\mathfrak{m}} \leqslant 2^{\mathfrak{n}}$ (ce qu'on démontre sans l'hypothèse G). Si on avait $2^{\mathfrak{m}} = 2^{\mathfrak{n}}$, l'inégalité $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ et l'inégalité générale connue $\mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{n}}$ donneraient $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$, contrairement à l'hypothèse G. Par conséquent on a bien $2^{\mathfrak{m}} < 2^{\mathfrak{n}}$.

Il est à remarquer que la proposition réciproque à C^1, c. à d. que *l'inégalité* $2^{\mathfrak{m}} < 2^{\mathfrak{n}}$ *entraîne l'inégalité* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, se déduit sans

---

[1]) ibidem, p. 314.

[2]) A. Tarski, *Fund. Math.* VII, p. 7, 9 et 10.

intervention de l'hypothèse G, directement de la trichotomie (qui résulte, comme on sait, de l'axiome du choix).

En effet, soient $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}$ deux nombres cardinaux tels que $2^{\mathfrak{m}} < 2^{\mathfrak{n}}$. Or, si l'inégalité $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ était en défaut, on aurait par trichotomie $\mathfrak{m} \geqslant \mathfrak{n}$, d'où $2^{\mathfrak{m}} \geqslant 2^{\mathfrak{n}}$, contrairement à l'inégalité admise. On a donc $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$.

Plusieurs conséquences de l'hypothèse G ont été déduites par M. A. Tarski, avant tout les propositions concernant les puissances des nombres cardinaux quelconques [1]) et les propositions sur la décomposition des ensembles en sous-ensembles presque disjoints [2]). Parmi ces dernières, notons la conséquence suivante de l'hypothèse G:

Proposition C^2. *Quels que soient les nombres cardinaux* $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$ *et* $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$, *aucun ensemble de puissance* $\mathfrak{m}$ *ne se laisse décomposer en* $> \mathfrak{m}$ *ensembles de puissance* $> \mathfrak{n}$ *ayant deux à deux* $< \mathfrak{n}$ *éléments communs.*

Il est remarquable qu'on ne sache établir cette proposition sans l'hypothèse G, même dans le cas le plus simple et le plus intuitif, où $\mathfrak{n} = \aleph_0$ [3]).

Une application de l'hypothèse G à l'Algèbre a été donnée par M. Reinhold Baer [4]).

Etant donné un nombre ordinal $\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$, appelons d'une façon générale *hypothèse* $G_{\mathfrak{m}}$ l'hypothèse suivante:

$G_{\mathfrak{m}}$. *Il n'existe aucun nombre cardinal* $\mathfrak{n}$ *tel que* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n} < 2^{\mathfrak{m}}$.

On démontre à l'aide de l'axiome du choix [5]) que $G_{\aleph_0} = H$. Nous allons montrer que l'hypothèse $G_{2^{\aleph_0}}$ est équivalente à chacune des deux propositions suivantes [6]):

---

1) Voir p. ex. propositions P^1, P^2 et P^3, p. 167.

2) *Fund. Math.* XII, p. 201 et suivantes; *Fund. Math.* XIV, p. 211 et suivantes.

3) Voir A. Tarski, *Fund. Math.* XIV, p. 213.

4) *Journ. für reine u. angew. Math.* 162 (1930), p. 132—133.

5) cf. plus haut p. 4 et 5.

6) W. Sierpiński, *Fund. Math.* XV, p. 1.

Proposition $P^1_{2^{\aleph_0}}$. *Il existe une famille F d'ensembles linéaires telle que*

(i) *des deux ensembles de la famille F un au moins est toujours une image continue de l'autre,*

(ii) *tout ensemble linéaire est une image continue d'un (au moins) des ensembles de la famille F.*

Proposition $P^2_{2^{\aleph_0}}$. *Il existe une famille F formée de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles linéaires distincts et satisfaisant à la condition* (i).

Démonstration. 1^0 $G_{2^{\aleph_0}} \to P^1_{2^{\aleph_0}}$. Admettons l'hypothèse $G_{2^{\aleph_0}}$ et soit

(1) $$E_1, E_2, \ldots, E_\omega, E_{\omega+1}, \ldots, E_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie du plus petit type ordinal possible, formée de tous les ensembles linéaires. On voit sans peine que l'inégalité $\xi < \varphi$ entraîne (pour les nombres ordinaux ξ) l'inégalité $\overline{\xi} < 2^{2^{\aleph_0}}$ où $\overline{\xi}$ désigne la puissance correspondant au nombre ordinal ξ. En vertu de l'hypothèse $G_{2^{\aleph_0}}$, elle entraîne donc l'inégalité $\overline{\xi} \leqslant 2^{\aleph_0}$.

J'ai démontré [1]) que pour toute famille Φ de puissance $\leqslant 2^{\aleph_0}$, formée d'ensembles linéaires, il existe un ensemble linéaire $\lambda(\Phi)$ tel que tout ensemble appartenant à Φ est une image continue de l'ensemble $\lambda(\Phi)$. Soit

(2) $$H_1, H_2, \ldots, H_\omega, H_{\omega+1}, \ldots, H_\xi, \ldots \qquad (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie du type φ d'ensembles, définie par l'induction transfinie comme il suit.

Posons $H_1 = E_1$. Etant donné un nombre ordinal $\alpha < \varphi$, soit Φ_α la famille formée de tous les ensembles E_ξ et H_ξ où $\xi < \alpha$. Comme $\alpha < \varphi$, nous avons $\overline{\alpha} \leqslant 2^{\aleph_0}$, ce qui donne sans peine $\overline{\overline{\Phi}}_\alpha \leqslant 2^{\aleph_0}$, et nous pouvons poser $H_\alpha = \lambda(\Phi_\alpha)$.

La famille F de tous les ensembles (2) ainsi définis satisfait évidemment à la proposition $P^1_{2^{\aleph_0}}$.

L'implication $G_{2^{\aleph_0}} \to P^1_{2^{\aleph_0}}$ est ainsi établie.

---

[1]) *Fund. Math.* XIV, p. 234.

2° $P^1_{2^{\aleph_0}} \to P^2_{2^{\aleph_0}}$. Soit maintenant F une famille d'ensembles linéaires satisfaisant à la condition (ii) de la proposition $P^1_{2^{\aleph_0}}$. Il s'agit de montrer que $\overline{\overline{F}} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

En effet, posons $\overline{\overline{F}} = \mathfrak{m}$. On a évidemment $\mathfrak{m} \leqslant 2^{2^{\aleph_0}}$. Or, tout ensemble linéaire admet, comme on sait, $2^{\aleph_0}$ images continues: la famille de tous les ensembles linéaires qui sont des images continues d'un au moins des ensembles de la famille F a donc une puissance $\leqslant 2^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{m}$ et la condition (ii) donne tout de suite $2^{2^{\aleph_0}} \leqslant 2^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{m}$, d'où $\mathfrak{m} \geqslant 2^{2^{\aleph_0}}$. On a donc $\mathfrak{m} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Nous avons ainsi démontré que toute famille F d'ensembles vérifiant la proposition $P^1_{2^{\aleph_0}}$ est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$, c. à d. satisfait à la proposition $P^2_{2^{\aleph_0}}$.

3° $P^2_{2^{\aleph_0}} \to G_{2^{\aleph_0}}$. Admettons qu'il existe un nombre cardinal $\mathfrak{n}$ tel que

(3) $$2^{\aleph_0} < \mathfrak{n} < 2^{2^{\aleph_0}}.$$

Soit F une famille vérifiant la proposition $P^2_{2^{\aleph_0}}$ et désignons par F_1 une partie quelconque de F composée de $\mathfrak{n}$ ensembles. La famille Γ_1 de toutes les images continues des ensembles de la famille F_1 aura donc la puissance $\leqslant 2^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{n}$. D'après (3) on trouve sans peine $2^{\aleph_0} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n} < 2^{2^{\aleph_0}}$. Il existe par conséquent un ensemble E de la famille F qui n'appartient pas à Γ_1.

Or, soit H un ensemble quelconque de la famille F_1. L'ensemble E n'appartenant pas à Γ_1, il s'en suit selon la définition de la famille Γ_1 que E n'est pas une image continue de H. Les ensembles E et H appartenant à la famille F, qui verifie la proposition $P^2_{2^{\aleph_0}}$, H est une image continue de E. Ainsi tout ensemble de la famille F_1 est une image continue de E. Cependant c'est impossible, la famille F_1 étant formée de $\mathfrak{n} > 2^{\aleph_0}$ ensembles distincts.

En conséquence, si la proposition $P^2_{2^{\aleph_0}}$ est vraie, il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{m}$ satisfaisant aux inégalités (3), c. à d. que $P^2_{2^{\aleph_0}}$ entraîne l'hypothèse $G_{2^{\aleph_0}}$.

L'équivalence entre les propositions $G_{2^{\aleph_0}}$, $P^1_{2^{\aleph_0}}$ et $P^2_{2^{\aleph_0}}$ est ainsi établie.

Plusieurs conséquences ont été déduites de l'hypothèse $G_{\mathfrak{m}}$ (sans faire usage de l'axiome du choix) par M.M. Lindenbaum et Tarski (l. c.). On leurs doit aussi le théorème suivant:

Les trois hypothèses $G_{\mathfrak{m}}$, $G_{2^{\mathfrak{m}}}$ et $G_{2^{2^{\mathfrak{m}}}}$ *impliquent que les nombres cardinaux* $\mathfrak{m}$, $2^{\mathfrak{m}}$ *et* $2^{2^{\mathfrak{m}}}$ *sont des alephs* [1]).

D'ailleurs, pour établir (sans l'aide de l'axiome du choix) que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, les deux hypothèses $G_{\aleph_0}$ et $G_{2^{\aleph_0}}$ sont suffisantes [2]).

Trois propositions, dont chacune est équivalente à l'hypothèse $G_{\mathfrak{m}}$, ont été données par M-lle S. Braun et par moi [3]). Notons encore la suivante:

Proposition $P_{\mathfrak{m}}$. *Tout ensemble de puissance* $2^{\mathfrak{m}}$ *est une somme d'ensembles croissants de puissance* $\mathfrak{m}$.

La démonstration que cette proposition équivaut à l'hypothèse $G_{\mathfrak{m}}$ est tout à fait analogue à celle de l'équivalence des propositions H et P_6 (voir plus haut p. 23 et 24).

---

1) A. Lindenbaum et A. Tarski, l. c., p. 314, proposition 89.

2) l. c., proposition 92. Signalons encore le théorème suivant de M. Tarski (l. c., p. 310, proposition 72):

S'il existe un nombre cardinal $\mathfrak{m}$ *tel que* $\aleph_\Omega = 2^{\mathfrak{m}}$, *on a* $\mathfrak{m} = \aleph_0$ (donc $2^{\aleph_0} = \aleph_\Omega$).

Or, il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{m}$ tel que $\aleph_\omega = 2^{\mathfrak{m}}$.

3) *Fund. Math.* XIX, p. 6, théorème II.

SUPPLÉMENT.

La majeure partie de ce livre était déjà imprimée quand j'ai reçu une lettre de M. N. Lusin (datée le 5 Mars 1934) où il me communique une nouvelle méthode permettant de démontrer sans l'hypothèse ***H*** plusieurs propositions qu'on ne savait démontrer jusqu'à présent qu'en s'appuyant sur cette hypothèse. En particulier, la méthode de M. N. Lusin permet de résoudre sans faire appel à l'hypothèse ***H*** le problème de M. C. Kuratowski, envisagé ici p. 116. Cette méthode peut être resumée comme il suit.

Lemme. *Etant donné un ensemble linéaire de deuxième catégorie Q situé dans un intervalle I, il existe un intervalle $J \subset I$ et deux sous-ensembles Q_1 et Q_2 de Q, disjoints et dont chacun est partout de deuxième catégorie dans l'intervalle J.*

Démonstration. Soit $\{a_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ un ensemble bien ordonné formé de tous les points de l'ensemble Q. C'est donc un ensemble de deuxième catégorie et il existe un nombre ordinal φ (comme on voit sans peine, $\Omega \leqslant \varphi \leqslant \vartheta$) le plus petit pour lequel l'ensemble

(1) $$E = \{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$$

est de deuxième catégorie.

Chacun des ensembles

(2) $$S_\alpha = \{a_\xi\}_{\xi<\alpha} \qquad \text{où} \quad \alpha < \varphi$$

est donc de première catégorie et on peut poser pour tout $\alpha < \varphi$

(3) $$S_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} Q_\alpha^n,$$

où Q_α^n ($\alpha < \varphi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$) sont des ensembles non-denses.

Posons pour les nombres ordinaux $\beta < \varphi$:

(4) $$U_\beta^n = \underset{a_\alpha}{E} [a_\alpha \in E, \quad a_\beta \in Q_\alpha^n].$$

D'après (2) on trouve sans peine pour $\beta < \varphi$

$$E - [S_\beta + (a_\beta)] = \underset{a_\alpha}{E} [a_\alpha \in E, \ a_\beta \in S_\alpha]$$

et la formule (4) donne tout de suite, d'après (3):

(5) $$E - [S_\beta + (a_\beta)] = \sum_{n=1}^{\infty} U_\beta^n \qquad \textit{pour} \quad \beta < \varphi.$$

L'ensemble E étant de deuxième catégorie et les ensembles (2) étant de première catégorie pour $\alpha < \varphi$, on conclut que les ensembles (5) sont de deuxième catégorie. En vertu de (5) il existe donc pour tout nombre ordinal $\beta < \varphi$ un nombre naturel n_β le plus petit pour lequel l'ensemble U_β^n est de deuxième catégorie.

Posons pour n naturels

(6) $$E_n = \underset{a_\beta}{E} [a_\beta \in E, \ n_\beta = n];$$

nous aurons évidemment

(7) $$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

L'ensemble E étant de deuxième catégorie, il existe le plus petit indice naturel m tel que l'ensemble E_m est de deuxième catégorie.

Soit maintenant

(8) $$I_1, I_2, I_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les intervalles aux extrémités rationnelles.

Considérons un nombre ordinal β tel que $a_\beta \in E_m$. D'après (6) on a donc $n_\beta = m$ et il résulte de la définition du nombre n_β que

l'ensemble U_β^m est de deuxième catégorie, donc partout de deuxième catégorie dans un certain intervalle. Il existe par conséquent le plus petit nombre naturel p_β tel que l'ensemble U_β^m est partout de deuxième catégorie dans l'intervalle I_{p_β}.

Posons pour p naturels

(9) $$E_m^p = \underset{a_\beta}{E}\, [a_\beta \in E_m,\ p_\beta = p];$$

nous aurons évidemment

(10) $$E_m = \sum_{p=1}^{\infty} E_m^p.$$

L'ensemble E_m étant de deuxième catégorie, il existe d'après (10) le plus petit nombre naturel q tel que l'ensemble E_m^q est de deuxième catégorie, donc partout de deuxième catégorie dans un certain intervalle I'.

Les ensembles Q_α^m $(\alpha < \varphi)$ étant non-denses, il existe pour tout $\alpha < \varphi$ un nombre naturel r_α qui est le plus petit de tous ceux pour lesquels on a

(11) $$I_{r_\alpha} \subset I' \quad et \quad Q_\alpha^m\, I_{r_\alpha} = 0.$$

Posons enfin pour r naturels

(12) $$H_r = \underset{a_\alpha}{E}\, [a_\alpha \in EI_q,\ r_\alpha = r];$$

nous aurons évidemment

(13) $$EI_q = \sum_{r=1}^{\infty} H_r.$$

Or, l'ensemble E est partout de deuxième catégorie dans I_q.

En effet, l'ensemble E_m^q étant de deuxième catégorie, donc non vide, il existe un nombre ordinal β tel que $a_\beta \in E_m^q$ et on a d'après (9) (pour $p = q$) $p_\beta = q$, de sorte que selon la définition de p_β l'ensemble U_β^m, qui d'après (4) est contenu dans E, est partout de deuxième catégorie dans l'intervalle $I_{p_\beta} = I_q$.

Ainsi l'ensemble E est partout de deuxième catégorie dans I_q. Nous en concluons en vertu de (13) qu'il existe un nombre

naturel s et un intervalle $J \subset I_q$ tels que l'ensemble H_s est partout de deuxième catégorie dans J.

D'après (13) on a évidemment $H_s \subset E$.

Or, nous allons montrer que l'ensemble $E - H_s$ est aussi partout de deuxième catégorie dans J.

En effet, l'ensemble H_s étant non vide (en tant que de deuxième catégorie), considérons un élément $a_\alpha \in H_s$. D'après (12) on a donc $r_\alpha = s$, d'où selon la définition de r_α la formule (11), qui entraîne $I_s \subset I'$. L'ensemble E_m^q étant partout de deuxième catégorie dans I', il en résulte que E_m^q est aussi partout de deuxième catégorie dans l'intervalle I_s. Considérons donc un élément $a_\lambda \in E_m^q I_s$. En vertu de (9) nous avons donc $a_\lambda \in E_m$ et $p_\lambda = q$. D'après la définition de p_β nous en concluons que l'ensemble U_λ^m est partout de deuxième catégorie dans $I_{p_\lambda} = I_q$ et par suite aussi dans J, puisque $J \subset I_q$.

En posant $Q_1 = H_s$ et $Q_2 = U_\lambda^m$, il reste donc à montrer que

(14) $$U_\lambda^m H_s = 0.$$

Supposons à ce but que l'égalité (14) soit en défaut: il existerait donc un élément a_α tel que

(15) $$a_\alpha \in U_\lambda^m H_s,$$

d'où $a_\alpha \in U_\lambda^m$ et, d'après (4),

(16) $$a_\lambda \in Q_\alpha^m.$$

Or, on a selon (11)

(17) $$Q_\alpha^m I_{r_\alpha} = 0.$$

D'autre part, il résulte de (15) que $a_\alpha \in H_s$, ce qui donne d'après (12) l'égalité $r_\alpha = s$. La formule (17) donnerait en conséquence $Q_\alpha^m I_s = 0$, d'où selon (16) a_λ *non-*$\in I_s$ contrairement à la définition de a_λ.

La formule (14) se trouve ainsi établie. Les ensembles $Q_1 = H_s$ et $Q_2 = U_\lambda^m$ sont par conséquent deux sous-ensembles

disjoints de l'ensemble E, donc aussi de l'ensemble $Q \supset E$. Enfin, il sont partout de deuxième catégorie dans l'intervalle J, c. q. f. d.

Ce lemme permet facilement de conclure que Q étant un ensemble partout de deuxième catégorie dans un intervalle I, on peut diviser I en un nombre fini d'intervalles partiels de longueur aussi petite qu'on le veut et de trouver dans chacun de ces intervalles partiels un sous-intervalle J et deux sous-ensembles de Q, disjoints et dont chacun est partout de deuxième catégorie dans J. En répétant ce procédé indéfiniment (pour les intervalles qui restent après la suppression dans I des intervalles partiels), on arrive à une suite infinie d'intervalles disjoints J_1, J_2, J_3, ... dont la somme est dense dans I et tels qu'il existe pour tout n naturel deux sous-ensembles Q'_n et Q''_n de Q situés dans J_n, disjoints et dont chacun est partout de deuxième catégorie dans J_n. Les ensembles

$$Q' = \sum_{n=1}^{\infty} Q'_n \quad et \quad Q'' = \sum_{n=1}^{\infty} Q''_n$$

sont évidemment deux sous-ensembles de Q, disjoints et dont chacun est partout de deuxième catégorie dans l'intervalle I, ce qui résout le problème de M. Kuratowski.

Ainsi, la méthode de M. Lusin permet de démontrer sans faire appel à l'hypothèse ***H*** le théorème suivant:

Théorème 1. *Tout ensemble linéaire qui est partout de deuxième catégorie dans un intervalle donné est une somme de deux ensembles disjoints de même nature.*

Il s'en suit sans peine de ce théorème que tout ensemble linéaire qui est partout de deuxième catégorie dans un intervalle donné est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles disjoints de même nature. Or, nous ne savons pas démontrer, à moins de faire appel à l'hypothèse C_{81}, que tout ensemble linéaire de deuxième catégorie est la somme d'une infinité indénombrable d'ensembles disjoints dont chacun est de deuxième catégorie (cf. la proposition C_{82}, p. 159).

La démonstration du théorème 1 s'applique, comme on l'aperçoit aisément, aux ensembles situés dans un espace métrique séparable quelconque (lorsqu'on remplace les intervalles par les sphères). Or, il est à remarquer que, même en admettant l'hypothèse H, nous ne savons pas répondre à la question si le théorème 1 est vrai ou non pour les ensembles situés dans un espace métrique quelconque (non séparable).

Voici encore une conséquence du théorème 1 (qu'on en tire sans faire appel à l'hypothèse H):

Théorème 2. *Tout ensemble linéaire E de deuxième catégorie contient un sous-ensemble E_1 qui n'est pas un produit de E et d'un ensemble mesurable* (B)[1].

Démonstration. Soit E un ensemble linéaire de deuxième catégorie: l'ensemble E est donc partout de deuxième catégorie dans un certain intervalle J. En vertu du théorème 1 on a $EJ = E_1 + E_2$, où $E_1 E_2 = 0$, chacun des deux ensembles étant partout de deuxième catégorie dans J.

Or, l'ensemble E_1 satisfait à la thèse du théorème. En effet, supposons que $E_1 = EQ$ où Q est un ensemble mesurable (B). On aurait donc $Q \supset E_1$ et Q serait partout de deuxième catégorie dans J. Cependant, l'ensemble Q est mesurable (B); son complémentaire CQ est donc de première catégorie dans J. Par conséquent l'ensemble $E_2 = EJ - E_1 = E(J - Q) = EJ \cdot CQ$ devrait être de première catégorie, contrairement à la définition de E_2.

Le théorème 2 est ainsi démontré. Il peut être évidemment exprimé aussi comme il suit:

Tout ensemble linéaire de deuxième catégorie est une somme de deux ensembles disjoints non séparables (B)

ou encore:

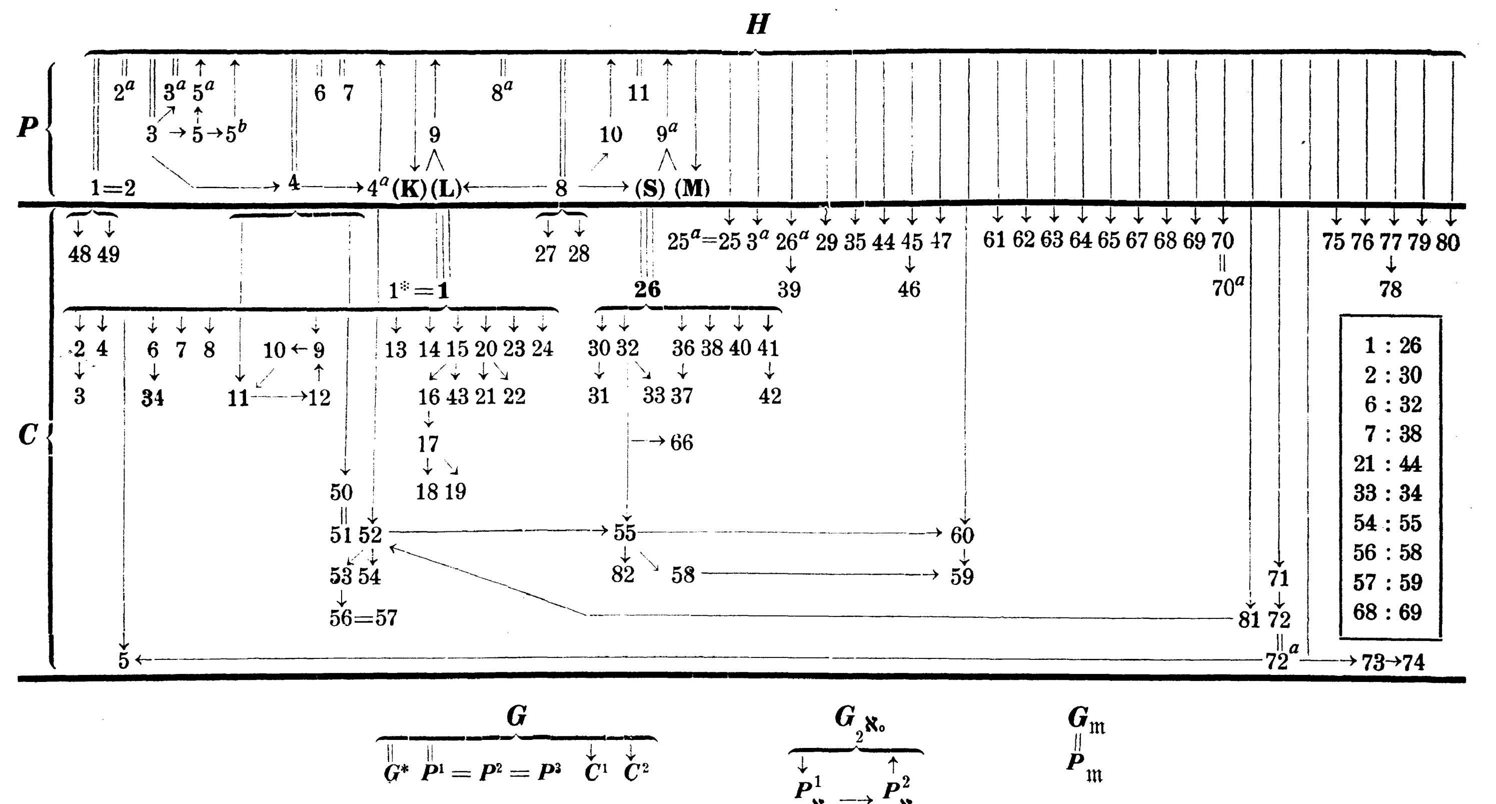
Il existe sur tout ensemble linéaire de deuxième catégorie une fonction (réelle) qui n'est pas une fonction de Baire sur lui (Novikoff).

---

[1]) Cf. le résultat de M. Lusin mentionné p. 111.

TABLE DES RELATIONS.

Signes: → implication, = équivalence, ≡ identité, : dualité.



INDEX TERMINOLOGIQUE.

AUTEURS CITÉS.

SOMMAIRE.

§ 2. **Propriété S. Dualité entre L et S. Conséquences $C_{27} - C_{40}$.**

§ 3. **Propriété λ. Conséquences $C_{41} - C_{46}$.**